

English Summary:

Degenerate Fermi gas: $\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \gg 1$ (high density limit)

$$U \approx \frac{3}{5} \bar{N} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad \text{caloric eq. of state}$$

$$kT \ln \Xi = pV = \frac{2}{3} U \approx \frac{2}{5} \bar{N} E_F \left[1 + \dots \right] \quad \text{thermal eq. of state}$$

Nondegenerate Fermi gas: $\zeta \ll 1$ (dilute gas)

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right] \quad \text{degeneracy conc. } N \sim T^{3/2}$$

$$n = \frac{\bar{N}}{V} \approx N_c e^{-\frac{E_F}{kT}}$$

$$pV \approx kT \bar{N} \left[1 + \dots \right]$$

class. ideal gas ↑ Fermi repulsion

4.5 Das ideale Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen $N_j = 0, 1, 2, \dots$
großkanon. Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1, \dots, N_c} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \left[\sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \right] \quad \text{mit } t_j := \exp[\beta(\mu - E_j)]$$

$$= \prod_j \frac{1}{\underbrace{1 - t_j}_{\Xi_j}}$$

geometrische Reihe konvergiert
genau dann, wenn $t_j < 1$,
also $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahlen N_1, N_2, \dots der
1-Teilchen-Zustände E_1, E_2, \dots zu finden

$$P(N_1, N_2, \dots) = \Xi^{-1} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$
$$= \prod_j \underbrace{(1 - t_j) t_j^{N_j}}_{p(N_j)} \quad \text{separiert!}$$

$$\Rightarrow p(N_j) = \underbrace{(1 - \exp(\beta(\mu - E_j)))}_{e^{\epsilon_j}} \exp\{\beta(\mu - E_j)N_j\}$$

Mittlere Besetzungszahl in Zustand E_j :

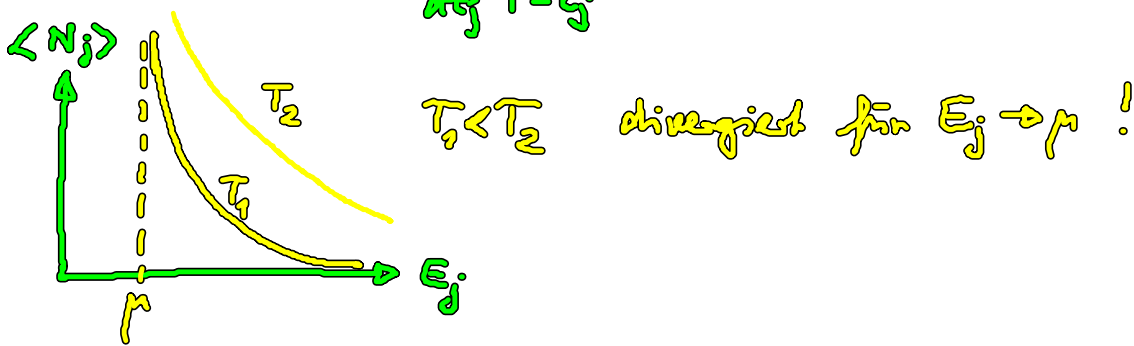
$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - t_j) = \frac{t_j}{1 - t_j} = \frac{1}{t_j^{-1} - 1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - 1}$$

Bose-Verteilung

(folgt auch explizit aus $\langle N_j \rangle = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j p(N_j) = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j (1 - t_j) t_j^{N_j}$)

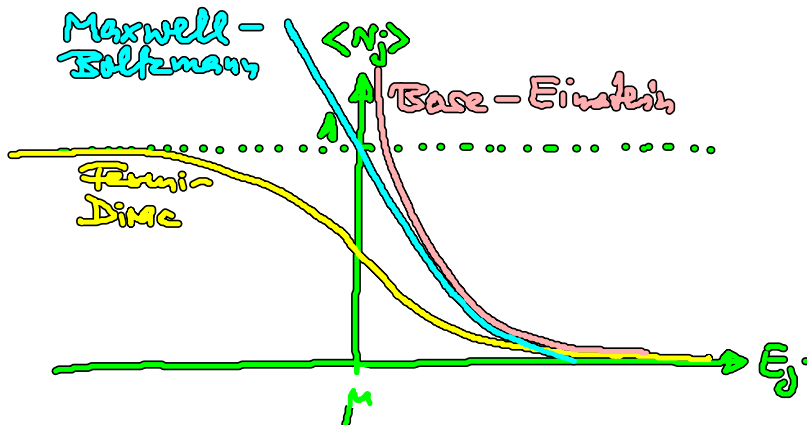
$$\langle N_j \rangle = (1 - t_j) t_j \underbrace{\frac{d}{dt_j} \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j}}_{\frac{d}{dt_j} \frac{1}{1 - t_j}} = (1 - t_j) t_j \frac{1}{(1 - t_j)^2}$$



Vergleich aller 3 Verteilungen:

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - \epsilon}$$

mit $\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$



Übergang zum Quasikontinuum der Zustände $E = \frac{p^2}{2m}$:

$$\ln \Xi = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln(1 - \zeta e^{-\beta E_j}) \quad (\zeta = e^{\beta \mu} \text{ Fugazität})$$

$$\approx - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}})$$

$$\text{part. Int.} = - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \frac{p^3}{3} \ln(1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p}{m} \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{\beta p^2}{2m}}{\frac{1}{3} \exp\left\{\frac{\beta p^2}{2m}\right\} - 1}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

Verdünntes Bosegas (quasiklass., nichtentarteter Grenzfall)

Entwicklung nach Potenzen von $\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$

gesamte Teilchenzahl:

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\left\{\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{kT}\right\} - 1}$$

$$\left(\frac{p^2}{2mkT} =: y\right)$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{\zeta^{-1} e^y - 1}$$

$$\bar{N} = \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty dy y^{1/2} \frac{\xi e^{-y}}{1 - \xi e^{-y}}$$

$$\approx \xi \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y} + \xi^2 \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-2y} + \dots$$

$$\bar{N} \approx V \frac{2S+1}{\lambda^3} \underbrace{e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\xi} \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

↑
mit $\lambda := \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{1/2} = \left(\frac{2S+1}{N_c} \right)^{1/3}$
Quantenkorrektur
therm. Wellenlänge

Ehm. von μ durch \bar{N} :

0. Näherung $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \xi$

1. Näherung $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \xi \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

$$\Rightarrow \xi = e^{\frac{\mu}{kT}} \approx \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \left[1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$$

Innere Energie:

$$U = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\exp\left\{\frac{p^2}{2m} - \mu\right\} - 1}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2\pi kT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy y^{3/2} \frac{\xi e^{-y}}{1 - \xi e^{-y}}$$

$$\approx \xi \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-y} + \xi^2 \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-2y} + \dots$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2S+1}{\lambda^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

kalor. Zustandsgl.

↑
Quantenkorrektur

$$pV = \frac{2}{3} U \approx kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

therm. Zustandsgl.

↑
Bose - Anziehung : Quantenkorrektur
(erweitrigter Druck)

Bose-Einstein-Kondensation

(theor.: Einstein 1925
exp.: Ketterle, Gross & Wieman '95
Nobelpreis 2001)

Grundzustand des Bose-Gases $\epsilon_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0 \rangle = \frac{1}{\zeta^{-1} - 1} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$$

Die mittlere Besetzungszahl dieses Quantenzustandes kann makroskopisch groß werden für $\zeta \approx 1$,

d.h. $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$ (alle Teilchen im Grundzustand kondensiert)

allg. $\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N'$ mit $N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$

(i) $\zeta \ll 1$ (normale Phase): $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar

\Rightarrow verdünntes Bosegas

(ii) $\zeta \approx 1$ (kondensierte Phase): $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \ll \bar{N}$

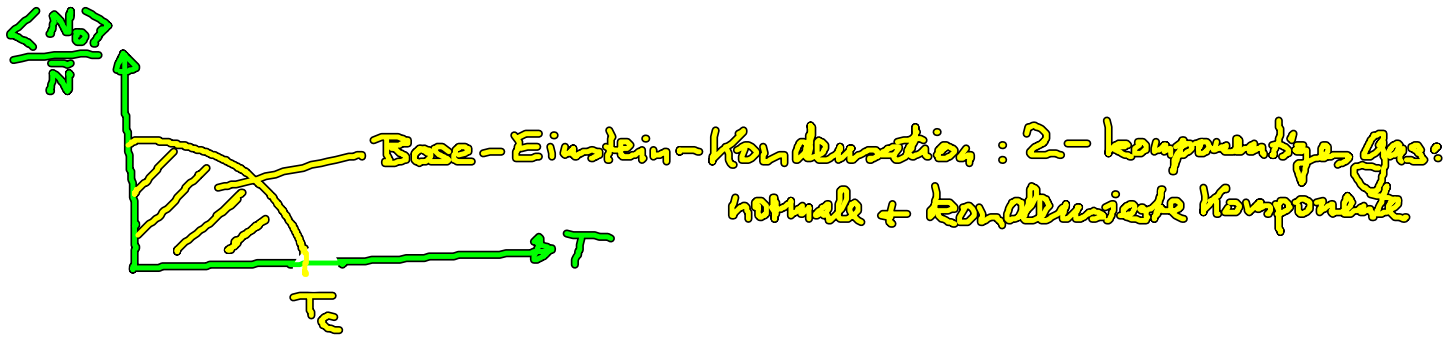
normale Komp. $\frac{N'}{V} \approx (2S+1) \lambda^{-3} \underbrace{\int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}}_1$

$\approx T^{3/2}$

$\Rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$ T_c def. durch $\zeta \approx 1$

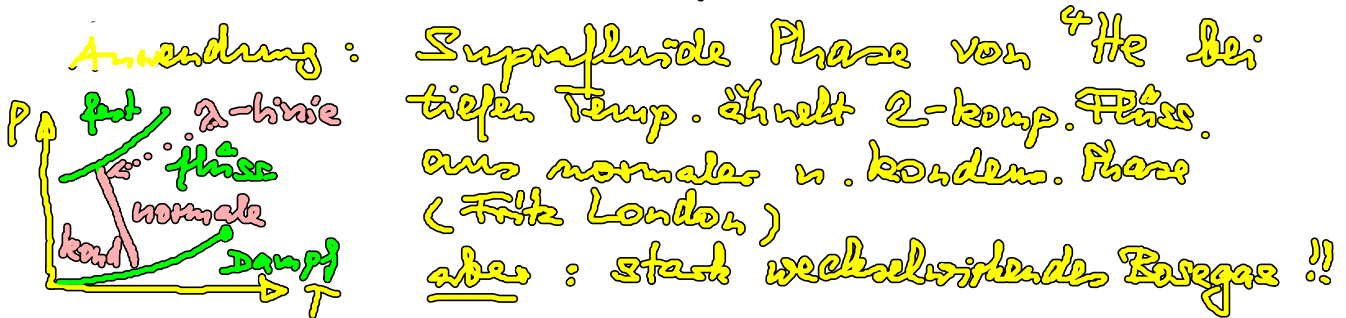
$$\Rightarrow \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$

Bruchteil der kondensierten Teilchen



Phasenübergang bei T_c : normale Phase \rightarrow kondensierte Phase

• makroskop. Quantenphänomenen!



Bose-Einstein-Kondensation mit schwach wechselw. Gasen

Vor. für exp. Beob. $\frac{\bar{N}}{V} \lambda^3 > 2.61\dots$

• hohe Phasendichte

• sehr tiefe Temp ($< 1 \mu\text{K}$ bei $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$)

\rightarrow Laserkühlung von Atomen (Nobelpreis Chu, Phillips, Cohen-Tannoudji 1997)

+ Verdampfungskühlung \Rightarrow 90-95% Kondensat

Cornell & Wienau : Rb-Atome (1995) $\sim 10^3$ Atome

Koblerle

: Na-Atome (") 10^5 Atome

- Kohärenter makroskop. Quantenzustand
(Quantenflüssigkeit)
- Atomlaser : kohärente stehende Em. v. Atomen
→ Interferenz (Ketterle, Hänsch 1999)
↓
Nobelpreis 2005
- Materiewellen-Solitonen :
makroskop. Wellenfkt.