

English Summary:

4.6 Photon gas in cavity

spectral energy density of black body radiation:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Planck's radiation formula

total energy: \int_0^∞

$$U(T) = V \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = V \frac{8\pi^5}{15 (ch)^3} (kT)^4$$

Stefan-Boltzmann Law

radiation pressure: $p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$

Einstein's derivation of Planck's formula:

$$B_{12} u(\nu, T) \langle N_1 \rangle = A_{21} \langle N_2 \rangle + B_{21} u(\nu, T) \langle N_2 \rangle$$

absorption spontaneous emission stimulated

5. Näherungsmethoden

5.1 Zeitabhängige Störungsrechnung (Dirac)

Es soll die zeitliche Entwicklung eines Zustandes $|4\rangle_t$ aus der Schrödingergl.

$$\hat{H} |4\rangle_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4\rangle_t$$

berechnet werden, wobei:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1(t)$$

Störung $\hat{H}^1 = \epsilon \hat{V}$ mit kleinem Par. $\epsilon \in \mathbb{R}_+$
evtl. explizit zeitabh.

Eigenwerte und -zustände von \hat{H}^0 seien bekannt:

$$\hat{H}^0 |n\rangle = E_n |n\rangle$$

ungestörtes Problem

$$\langle n | n' \rangle = \delta_{nn'}$$

(diskretes Spektrum)

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$$

Entwicklung von $|\psi\rangle_t$ nach den ungestörten Eigenzuständen $|n\rangle$:

$$|\psi\rangle_t = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle_t}_{c_n(t)} = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

Anfangsbed. sei ein ungestörter Eigenzustand $|n_0\rangle$:

$$|\psi\rangle_{t=0} = |n_0\rangle \Rightarrow c_n(0) = \delta_{nn_0}$$

Zeitentwicklung unter dem Einfluss der Störung:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt} |n\rangle = \sum_n c_n(t) (\underbrace{\hat{H}^0 |n\rangle}_{E_n |n\rangle} + \hat{H}^1(t) |n\rangle)$$

links multipliziert mit $\langle m|$:

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + \sum_n \langle m|\hat{H}^1|n\rangle c_n(t) \quad (*)$$

Def. $g_n(t)$ durch $c_n(t) = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}}_{\text{zeitentw. der ungestörte Zust.}}$ $g_n(t)$

(Lösung von $(*)$ für $\epsilon=0$)

$$\Rightarrow i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} i\hbar \frac{dg_m}{dt}$$

$$\text{in } (*): \boxed{i\hbar \frac{dg_m}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{H}^1|n\rangle g_n(t)}$$

Störungsentwicklung für kleines ϵ mit $\hat{H}^1 = \epsilon \hat{V}$:

$$g_n(t) = g_n^{(0)}(t) + \epsilon g_n^{(1)}(t) + \epsilon^2 g_n^{(2)}(t) + \dots$$

Koeffizientenvergleich in Ordnung ϵ^v :

$$\underline{v=0}: i\hbar \frac{dg_m^{(0)}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{g_m^{(0)}(t) = \text{const.} = \delta_{mn_0}}$$

$$\underline{v=1}: i\hbar \frac{dg_m^{(1)}}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m - E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{V}|n\rangle \underbrace{g_n^{(0)}}_{\delta_{nn_0}}$$

$$= \exp \left\{ \frac{i(E_m - E_{n_0})t}{\hbar} \right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle \delta_{mn_0}$$

Auf. bed. $g_n^{(1)}(0) = 0$

$$\Rightarrow g_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dz \exp \left\{ \frac{i(E_m - E_{n_0})z}{\hbar} \right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle$$

Übergangswahrscheinlichkeit

Wahrsch., zur Zeit t den Zustand $|n\rangle$ zu finden,
wenn für $t=0$ $|n_0\rangle$ vorlag:

$$|\langle n | \psi \rangle_t|^2 = \left| \sum_{n'} c_{n'}(t) \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}} \right|^2 = |c_n(t)|^2 = |g_n(t)|^2$$

Näherung: niedrigste, nicht verschwindende Ordn. der
Störungsrechnung

$$g_n(t) = \begin{cases} g_n^{(0)} = \delta_{nn_0} = 1 & \text{für } n = n_0 \\ \varepsilon g_n^{(1)} & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

(a) zeitunabh. Störung: $\hat{V} = \text{const.}$

$$g_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dz \exp \left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0})z}{\hbar} \right\} \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle$$

$$= -\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \frac{\exp \left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0})t}{\hbar} \right\} - 1}{E_n - E_{n_0}}$$

$$|g_n^{(1)}(t)|^2 = |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{(e^{-i\Omega t} - 1)(e^{i\Omega t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

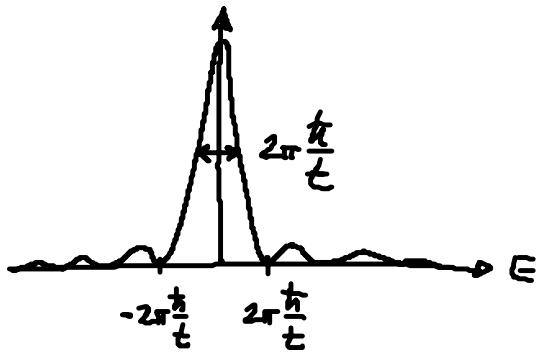
mit Übergangsfrequenz $\Omega := \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$

$$= |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{2(1 - \cos(\Omega t))}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$= |\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle|^2 \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\Omega}{2} t \right)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$D_t(E)$$

$$=: D_t(E_n - E_{n_0})$$



$$D_t(0) = \left(\frac{t}{\hbar}\right)^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE D_t(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{4}{E^2} \underbrace{\sin^2\left(\frac{Et}{2\hbar}\right)}_{\pi} \\ = \frac{2t}{\hbar} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta}}_{\pi}$$

$$\text{Also } D_t(E) =: \frac{2\pi}{\hbar} t \delta_t(E) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\hbar} t \delta(E)$$

$$\Rightarrow |\langle n | \psi_t \rangle|^2 = |g_n(t)|^2 \approx \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{H}' | n_0 \rangle|^2 t \delta_t(E_n - E_{n_0})$$

Für $t \rightarrow \infty$: Energieerhaltung $E_n - E_{n_0} = 0$

Für $t < \infty$ hat $D_t(E)$ die Breite $\Delta E \approx \frac{2\pi\hbar}{t}$

$$\Rightarrow \text{Energie-Zeit-Unschärferelation } \Delta E \cdot t \approx 2\pi\hbar$$

Übergangswahrsch. pro Zeiteinheit (von n_0 nach n) = Rate:

$$W_{nn_0} = \frac{d}{dt} |\langle n | \psi_t \rangle|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{H}' | n_0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0})$$

(Fermi's Goldene Regel; Störungstheorie 1. Ordnung) für $t \rightarrow \infty$

(b) Harmon. zeitabh. Störung

$$\hat{H}'(t) = \hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{hermitesch!})$$

$$g_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)\tau}{\hbar} \right\} \langle n | \hat{F} | n_0 \rangle$$

$$-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left\{ \frac{i(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)\tau}{\hbar} \right\} \langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle$$

$$= - \langle n | \hat{F} | n_0 \rangle \frac{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n_0} - \hbar\omega) t \right\} - 1}{E_n - E_{n_0} - \hbar\omega} - \langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle \frac{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n_0} + \hbar\omega) t \right\} - 1}{E_n - E_{n_0} + \hbar\omega}$$

$$|\langle n | \psi \rangle_t|^2 = |g_n|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle|^2 \pm \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega) + \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle|^2 \pm \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$

gemischte Terme
oszillieren
für $\omega \neq 0$,
 $\Omega \neq 0$,
für $t \rightarrow \infty$
vernachlässigbar
gegen $\pm \delta(\hbar\Omega^\pm)$

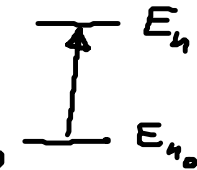
$$\left\{ \begin{array}{l} + \underbrace{\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle^* \langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle}_{A e^{-i\Omega^- t}} \frac{(e^{-i\Omega^- t} - 1)(e^{i\Omega^+ t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+} \\ + \underbrace{\langle n | \hat{F}^\dagger | n_0 \rangle^* \langle n | \hat{F} | n_0 \rangle}_{A e^{i\Omega^+ t}} \frac{(e^{-i\Omega^+ t} - 1)(e^{i\Omega^- t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+} \end{array} \right.$$

mit $\Omega^\pm := \Omega \pm \omega = \frac{E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega}{\hbar}$

Übergangswahrscheinl. pro Zeit für $t \rightarrow \infty$
von n_0 nach n :

$$W_{n n_0} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | \hat{F} | n_0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega) + \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n_0 | \hat{F} | n \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$

Absorption eines Quants $\hbar\omega$



Emission eines Quants $\hbar\omega$

