

English Summary:

6. Scattering Theory

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$$

Lippmann-Schwinger eq. $|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0 \pm i\epsilon} \hat{H}^1 |\psi^{(\pm)}\rangle$

outgoing wave incoming wave scattered wave

Green's fct. of free particle: $\hat{G}_\pm = \frac{1}{E - \hat{H}^0 \pm i\epsilon}$ $(E - \hat{H}^0) \hat{G}_\pm = 1$

momentum representation ↓

$$\langle \underline{q} | \hat{G}_\pm | \underline{q}' \rangle = \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{G}_\pm(\underline{q}) \delta(\underline{q} - \underline{q}') , \quad \tilde{G}_\pm(\underline{q}) = \frac{1}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon}$$

Fourier trafo ↓

$$\langle \underline{r} | \hat{G}_\pm | \underline{r}' \rangle = \frac{2m}{\hbar^2} G_\pm(\underline{r} - \underline{r}') , \quad G_\pm(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$(\Delta + k^2) G_\pm(\underline{r} - \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Scattering potential $\hat{H}^1 = V$:

$$\psi^+(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\underline{r} - \underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

Asymptot. Verhalten der Lippmann-Schwinger-Fl. für $|\underline{r}| \rightarrow \infty$:

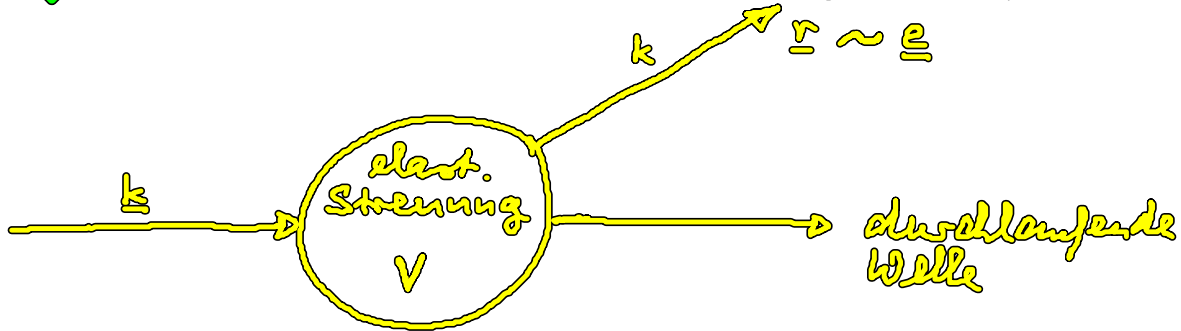
$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \underbrace{e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}}_{\text{durchlaufende Welle}} - \frac{2m}{\hbar^2} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{4\pi r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \int d^3r' e^{-ik(\underline{e} \cdot \underline{r}')} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

mit der Streumatrix

$$f(\underline{e}) := -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik(\underline{e} \cdot \underline{r}')} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

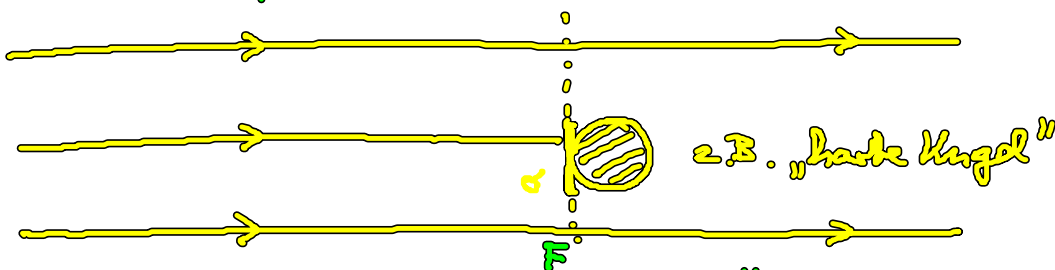
hängt ab von der Beobachtungsrichtung $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{r}$:



Wirkungsquerschnitt

Streuung eines Teilchenstrahls an einem (undurchdringlichen) Streuzentrum:

$$\frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen/sec}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen/sec}} = \frac{\text{streuende Fläche } \sigma}{\text{Fläche } F, \text{ auf die der Strahl trifft}}$$

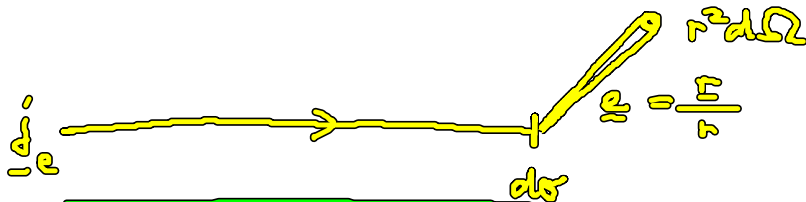


Verallgemeinerung für „weiche“ Potenzialstreuung:

$$\frac{\text{Wirkungsquerschnitt } \sigma}{(\text{Streh-})} := \frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen pro sec}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro sec}}$$

differenzieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der in Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreuten T. pro sec}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro sec}}$$



$$\boxed{d\sigma = \frac{(j_s)_r r^2 d\Omega}{|j_e|}}$$

Zur einlaufenden Welle

$$\psi_e(\underline{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \underline{r}}$$

gehört die Stromdichte

$$\underline{j}_e = \frac{\hbar}{2im} (\psi_e^* \nabla \psi_e - \psi_e \nabla \psi_e^*) = \frac{\hbar k}{m}$$

zur Stromstelle in Richtung \underline{e}

$$\psi_s(\underline{r}) = f(s) \frac{e^{ikr}}{r}$$

gehört die Radial-Komponente der Stromdichte

$$\begin{aligned} (j_s)_r &= \frac{\hbar}{2im} \left(\psi_s^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_s - \psi_s \frac{\partial}{\partial r} \psi_s^* \right) \\ &= \frac{\hbar}{2im} |f(s)|^2 \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} - \frac{e^{ikr}}{r} \left(-\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr} \right\} \\ &= \frac{\hbar k}{mr^2} |f(s)|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(s)|^2} \quad \text{diff. Wirkungsquerschnitt}$$

$$\boxed{\sigma = \int d\Omega |f(s)|^2} \quad \text{totaler Wirkungsquerschnitt}$$

6.3 Born'sche Näherung

Störungstheoretische Näherung für große Einstrahlungsenergie $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V(\underline{r})$: \hat{H}' als kleine Störung,

1. Ordnung Störungsrechnung der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$\boxed{|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_+ \hat{H}' |\phi\rangle} \quad \underline{\text{1. Born'sche Näherung}}$$

In Ortsdarstellung:

$$\psi^{(+)}(\underline{r}) \approx \psi_e(\underline{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \hat{G}_+(\underline{r}-\underline{r}') V(\underline{r}') \psi_e(\underline{r}')$$

$$\text{mit } \psi_e(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

Streuamplitude in 1. Born'scher Näherung:

$$f(\underline{\epsilon}) \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' V(\underline{r}') e^{i\underline{K} \cdot \underline{r}'}$$

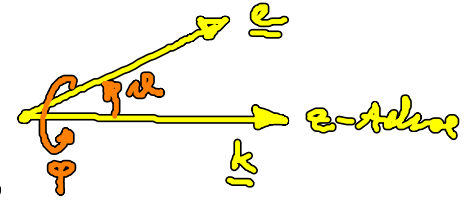
mit $\underline{K} := \underline{k} - \underline{k}_0$



d.h. Streuamplitude \sim Fouriertransformierte von $V(\underline{r})$

Kugelsymm. Pot. $V(r)$:

Parametrisierung von $\underline{\epsilon}$ durch (α, φ)



$$\Rightarrow K = |\underline{k} - \underline{k}_0| = \sqrt{k^2 + k^2 - 2k^2 \cos \alpha} = 2k \sin \frac{\alpha}{2}$$

Streuvektor

Integration d^3r' in Kugelkoordinaten (r', α', φ') um \underline{K} -Achse

$$\underline{K} \cdot \underline{r}' = Kr' \cos \alpha'$$

$$d^3r' = r'^2 dr' d(\cos \alpha') d\varphi'$$



$f(\underline{\epsilon})$ hängt aus Symmetriegründen nicht von φ ab:

$$f(\alpha) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') e^{iKr' \cos \alpha'} \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$\frac{1}{iKr'} (e^{iKr'} - e^{-iKr'}) = 2 \frac{\sin Kr'}{Kr'}$$

$$f(\alpha) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{K} \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin(Kr')$$

$$K = 2k \sin \frac{\alpha}{2}$$

diff. Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi |f(\theta)|^2$

Rutherford-Streuung: Streuung eines Z_1 -fach geladenen Teilchens an einem Z_2 -fach geladenen $\Rightarrow V(r) = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$

⇒ Konvergenzschwierigkeiten, daher betrachte

Yukawa-Pot. $V(r) = \frac{a}{r} e^{-\alpha r}$ mit $\alpha \rightarrow 0$.

Für $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$ ergibt sich dann

die klass.-mechan. Formel! Dies ist sogar die exakte quantenmech. Lösung (nähert nur 1. Born'sche Näherung)

NB: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ divergiert für $\vartheta \rightarrow 0$ wegen unendl. Reichweite von $V(r)$; σ divergiert ebenfalls.

Systematische Störungsentwicklung:

Iteration der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R} |\psi^{(+)}\rangle \quad \hat{R} := \hat{G}_+ \hat{H}'$$

ergibt

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R} |\phi\rangle$$

$$= (1 + \hat{R}) |\phi\rangle$$

1. Born'sche Näherung

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R} |\psi^{(+)}\rangle$$

$$= (1 + \hat{R} + \hat{R}\hat{R}) |\phi\rangle$$

2. Born'sche Näherung

⋮

$$|\psi\rangle = (1 + \hat{R} + \hat{R}^2 + \hat{R}^3 + \dots) |\phi\rangle$$

Born'sche Reihe

(konvergent für kleine V)