

English Summary:

6.2 Scattering amplitude  $f(\underline{e})$ ,  $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{|\underline{r}| \rightarrow \infty} e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} + f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$f(\underline{e}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\underline{k} \cdot (\underline{e} \cdot \underline{r}') } V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

differential scattering cross section  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2$

6.3 Born approximation:  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V(\underline{r})$

$$\Rightarrow |\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_+ \hat{H}^1 |\phi\rangle \quad \text{1st order perturb. theory}$$

Born series:

$$|\psi\rangle = (1 + \hat{R} + \hat{R}^2 + \hat{R}^3 + \dots) |\phi\rangle$$

$$\text{with } \hat{R} := \hat{G}_+ \hat{H}^1$$

## 7. Relativistische Quantentheorie

Bisher: Schrödingergl. mit Hamiltonop., abgeleitet nach dem Korrespondenzprinzip aus dem Hamiltonformalismus der klass. nichtrelativist. Mechanik

$$\Rightarrow \underline{\text{Galilei-invariant}} \quad \left( \begin{array}{l} \underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \\ t' = t \end{array} \right)$$

Gültigkeit: Teilchengeschw.  $v \ll c$

(nicht erfasst: z.B. WW Licht-Materie, hochenergetische Elektronen)

Jetzt: Lorentz-invariante Quantentheorie

Schwierigkeit: Teilchenzahlerhaltung gilt nicht mehr wegen  $E = mc^2$

(Äquivalenz von Energie u. Masse)

⇒ relativist. Quantenfeldtheorie erforderlich  
hier: nur Quantentheorie eines relativist. Teilchens in einem klassischen elektromagn. Feld behandelt

(Spin 0 → Klein-Gordon-Fl.

Spin  $\frac{1}{2}$  → Dirac-Gleichung)

## 7.1 Kovariante Schreibweise der Relativitätstheorie

Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie:

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip, Einstein 1905).

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist in jedem Inertialsystem gleich ⇒  $r^2 - c^2 t^2 = r'^2 - c^2 t'^2$

(Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw.  $c$  sind Lorentz-invariant)

Formalisierung:

Der raum-zeitliche Abstand  $ds$

$$(ds)^2 := (c dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

bleibt invariant bei Transformationen zwischen Inertialsystemen (= Lorentztransformationen).

Schreibe  $(ds)^2$  als Skalarprodukt von 4-Zeit-Orts-Vektoren im Minkowski-Raum  $V$  und benutze den Formalismus der linearen orthogonalen Transformationen, unter denen das Skalarprodukt invariant ist:

Def.: kontravariante Komponenten des

4-Zeit-Orts-Vektors  $x^\alpha := ct$

$x^\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  : kartes. Komponenten  
des Ortsvektors  $\underline{r}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

( $V$  nicht euklidischer Raum)

Def.: kovariante Komponenten des 4-Vektors:

$$\boxed{x_0 := x^0}$$

$$x_\alpha := -x^\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$$

(kovarianten Vektor  $\in$  dualer Vektorraum  $\tilde{V}$  :  
 $\tilde{V} = \{ \text{lin. Funktionale } l : V \rightarrow \mathbb{R} \}$ )

$$\Rightarrow \boxed{(ds)^2 = dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3}$$
$$= dx^i dx_i$$

Summationskonvention über  $i = 0, 1, 2, 3$ ,

wenn ein Index oben (kontrav.) und einer unten (kovar.) auftritt.

Verallgemeinerung:

Für beliebige 4-Vektoren  $a^i$  gilt:  $a_\alpha = a^\alpha$   
 $a_\alpha = -a^\alpha, \alpha = 1, 2, 3$

- Lorentz-Invariante lassen sich als Skalarprodukte  $a^i a_i$  schreiben!

### d) Alembert-Operator

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) =: \partial_i \quad \text{kovariant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) =: \partial^i \quad \text{kontravariant}$$

} Begründung  
s. später  
aus dem  
Transform.  
verhalten

$$\Rightarrow \square = - \partial_i \partial^i$$

### 4 - Geschwindigkeit

$$u^i := \frac{dx^i}{ds}$$

$$\text{mit } ds = (dx^i dx_i)^{1/2}$$

$$= (c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2)^{1/2}$$

$$= c \left[ 1 - \left( \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

$$= c (1 - \beta^2)^{1/2} dt$$

$$= \frac{c}{\gamma} dt$$

$$\beta := \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^0 = \gamma \\ u^\alpha = \frac{\gamma}{c} v^\alpha \end{cases}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad d\tau := \frac{dt}{\gamma} \quad \text{Eigenzeit}$$

(= Zeit im momentanen  
Ruhssystem)

$$u^i u_i = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1 \quad \text{invariant!}$$

### 4 - Impuls

$$p^i := m_0 c u^i$$

$$\Rightarrow p^i p_i = m_0^2 c^2 \underbrace{u^i u_i}_1 = m_0^2 c^2 \quad (*)$$

invariant!

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) c = p_0$$

$$p^\alpha = \frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = m(v) v^\alpha = - p_\alpha$$

Phys. Bedeutung von  $p^0$ :

Mit der 4-Kraft  $k^i := \frac{d}{dt} p^i$

folgt die Leistungsbilanz

$$k^i u_i = \left[ \frac{d}{dt} (m_0 c u^i) \right] u_i \stackrel{\text{"Energiesatz"}}{=} \frac{m_0 c}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(u^i u_i)}_1 \stackrel{\text{Lorentz-invar.}}{=} 0$$

$$= \left( \frac{d}{dt} p^0 \right) u_0 = \sum_{\alpha=1}^3 k^\alpha u_\alpha$$

$$= \gamma \frac{d}{dt} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{\alpha=1}^3 k^\alpha v_\alpha = \frac{\gamma}{c} \left[ \frac{d}{dt} (c p^0) - \underline{k \cdot v} \right] \stackrel{\text{Energie Leistung}}{=} 0$$

Also  $\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$ ,  $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$  Energie

$$\Rightarrow p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p^2} \stackrel{\text{Lorentz-invar.}}{=} (m_0 c)^2, \quad \underline{p} = \frac{m_0 \underline{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \quad \underline{\text{relativist. Energie-Impuls-Beziehung}}$$

Math. Formalismus

Tensoren 2. Stufe:  $A^{ik}, A^i_k, A_i^k, A_{ik}$

$$\text{mit } A^{00} = A^0_0 = A_0^0 = A_{00}$$

$$A^{10} = A^1_0 = -A_1^0 = -A_{10}$$

$$A^{11} = -A^1_1 = -A_1^1 = A_{11}$$

usw.

Spur eines Tensors:  $\text{Sp} A = A^i_i = A_i^i$

4-Einheits tensor

$$\delta_k^i := \delta^i_k = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad \text{Symm. !}$$

$$\delta_k^i a^k = a^i, \quad \delta_k^i A^{kl} = A^{il} \quad \text{usw.}$$

## Metrischer Tensor

$$g^{ik} := \delta^{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } k=0 \\ -\delta_{ik} & \text{für } k=1,2,3 \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{ik}$$

$$\underline{g^{ik} a_k} = \delta^{ik} a_k = \begin{cases} a_i & \text{für } i=0 \\ -a_i & \text{für } i=1,2,3 \end{cases} = \underline{a^i}$$

"Heben oder Senken der Indizes durch  $g^{ik}$  bzw.  $g_{ik}$ "

Lorentz-Trafo (linear, homogen):  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$

$$\boxed{x'^i = U^i_k x^k} \quad U^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } v \parallel x^1$$

Invarianz des Skalarprodukts:

$$a'^i = U^i_k a^k, \quad b'^i = U^i_k b^k \Rightarrow \boxed{b'_i = U_{ik} b^k = U_i^k b_k}$$

$$a'^i b'_i = U^i_k U_i^l a^k b_l = a^k b_k \Rightarrow \boxed{U^i_k U_i^l = \delta_k^l} \quad U \text{ orthogonale Trafo}$$

Umkehr-Trafo:

$$\boxed{\begin{aligned} a^i &= U_k^i a'^k \\ a_i &= U^k_i a'_k \end{aligned}}, \text{ denn } U_k^i U_i^l a^l = \delta_k^l a^l = a^k \quad \square$$

Transformationsverhalten des 4-Gradienten

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x'^k} \underbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}}_{U^k_i} = U^k_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^k}}_{\partial'_k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ transformiert sich wie } a_i \text{ (kovariant)}$$

Analog:  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  transf. sich wie  $a^i$  (kontravariant)