English Summary:

6.2 Scattering amplitude $f(\underline{e})$, $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$$\boxed{\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{|\underline{r}|\to\infty} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + f(\underline{e})\frac{e^{ikr}}{r}}$$

$$f(\underline{e}) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int d^3r'\, e^{-ik(\underline{e}\cdot\underline{r}')} V(\underline{r}')\psi^+(\underline{r}')$$

differential scattering cross section $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2$

6.3 Born approximation : $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V(\underline{r})$

$\Rightarrow |\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_+\hat{H}^1|\phi\rangle$ 1st order perturb. theory

Born series :

$$|\psi\rangle = (1 + \hat{R} + \hat{R}^2 + \hat{R}^3 + \dots)|\phi\rangle$$

with $\hat{R} := \hat{G}_+\hat{H}^1$

7. Relativistische Quantentheorie

Bisher : Schrödingergl. mit Hamiltonop., abgeleitet nach dem Korrespondenzprinzip aus dem Hamiltonformalismus der klass. nichtrelativist. Mechanik

$\Rightarrow$ Galilei-invariant $\left(\begin{array}{l}\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \\ t' = t\end{array}\right)$

Gültigkeit : Teilchengeschw. $v \ll c$

(nicht erfasst : z.B. WW Licht-Materie, hochenergetische Elektronen)

Jetzt : Lorentz-invariante Quantentheorie

Schwierigkeit: Teilchenzahlerhaltung gilt nicht mehr wegen $E = mc^2$
(Äquivalenz von Energie u. Masse)

$\Rightarrow$ relativist. Quantenfeldtheorie erforderlich

hier: nur Quantentheorie eines relativist. Teilchens in einem klassischen elektromagn. Feld behandelt

(Spin 0 $\rightarrow$ Klein-Gordon-Gl.

Spin $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ Dirac-Gleichung)

7.1 Kovariante Schreibweise der Relativitätstheorie

Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie:

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip, Einstein 1905).

Die Lichtgeschwindigkeit c ist in jedem Inertialsystem gleich $\Rightarrow$ $\underline{r}^2 - c^2t^2 = \underline{r}'^2 - c^2t'^2$

(Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c sind Lorentz-invariant)

Formalisierung:

Der raum-zeitliche Abstand ds

$$(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$$

bleibt invariant bei Transformationen zwischen Inertialsystemen (= Lorentztransformationen).

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von 4-Zeit-Orts-Vektoren im Minkowski-Raum V und benutze den Formalismus der linearen orthogonalen Transformationen, unter denen das Skalarprodukt invariant ist:

Def.: kontravariante Komponenten des 4-Zeit-Orts-Vektors $x^0 := ct$

x^α, $\alpha = 1,2,3$: kartes. Kompon. des Ortsvektors $\underline{r}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

(V nichteuklidischer Raum)

Def.: kovariante Komponenten des 4-Vektors:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &:= x^0 \\ x_\alpha &:= -x^\alpha \end{aligned}} \quad \alpha = 1,2,3$$

(kovarianten Vektor $\in$ dualer Vektorraum $\tilde{V}$:
$\tilde{V} = \{$ lin. Funktionale $\ell : V \to \mathbb{R} \}$)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= dx^i dx_i \end{aligned}}$$

Summationskonvention über $i = 0,1,2,3$, wenn ein Index oben (kontravar.) und einer unten (kovar.) auftritt.

Verallgemeinerung:

für beliebige 4-Vektoren a^i gilt: $a_0 = a^0$
$a_\alpha = -a^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$

- Lorentz-Invariante lassen sich als Skalarprodukte $a^i a_i$ schreiben!

d'Alembert – Operator

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) =: \partial_i \quad \text{kovariant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) =: \partial^i \quad \text{kontravariant}$$

Begründung s. später aus dem Transform. verhalten

$$\Rightarrow \boxed{\Box = -\partial_i \partial^i}$$

4 – Geschwindigkeit

$$\boxed{u^i := \frac{dx^i}{ds}}$$

mit

$$ds = (dx^i dx_i)^{1/2}$$

$$= (c^2 dt^2 - (d\underline{r})^2)^{1/2}$$

$$= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

$$= c(1-\beta^2)^{1/2}\, dt$$

$$= \frac{c}{\gamma}\, dt$$

$$\beta := \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^\alpha &= \frac{\gamma}{c} v^\alpha \end{aligned}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad d\tau := \frac{dt}{\gamma} \quad \underline{\text{Eigenzeit}}$$

(= Zeit im momentanen Ruhsystem)

$$u^i u_i = \frac{\overbrace{dx^i dx_i}^{(ds)^2}}{(ds)^2} = 1 \quad \text{invariant !}$$

4 – Impuls

$$\boxed{p^i := m_0 c\, u^i} \Rightarrow p^i p_i = m_0^2 c^2 \underbrace{u^i u_i}_{1} = m_0^2 c^2 \quad (*)$$

invariant !

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v)\, c = p_0$$

$$p^\alpha = \frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m(v)\, v^\alpha = -p_\alpha$$

Phys. Bedeutung von p^0:

Mit der 4-Kraft $k^i := \frac{d}{d\tau} p^i$

folgt die Leistungsbilanz "Energiesatz"

$$k^i u_i = \left[\frac{d}{d\tau}(m_0 c u^i)\right] u_i = \frac{m_0 c}{2}\frac{d}{d\tau}(\underbrace{u^i u_i}_{1}) = 0$$

Lorentz-invar.

$$= \left(\frac{d}{d\tau}p^0\right)u_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} k^\alpha u_\alpha$$

$$= \gamma \frac{d}{d\tau}p^0 + \frac{\gamma}{c}\sum_{\alpha=1}^{3} k^\alpha v_\alpha = \frac{\gamma}{c}\left[\frac{d}{d\tau}(\underbrace{cp^0}_{\text{Energie}}) - \underbrace{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}_{\text{Leistung}}\right] = 0$$

Also $\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$, $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Energie

$$\Rightarrow p^i p_i = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \overset{(*)}{=} (m_0 c)^2 \quad , \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Lorentz-invar.

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2}$$ relativist. Energie-Impuls-Beziehung

Math. Formalismus

Tensoren 2. Stufe: $A^{ik}, A^i{}_k, A_i{}^k, A_{ik}$

mit $A^{00} = A^0{}_0 = A_0{}^0 = A_{00}$

$A^{10} = A^1{}_0 = -A_1{}^0 = -A_{10}$

$A^{11} = -A^1{}_1 = -A_1{}^1 = A_{11}$

usw.

Spur eines Tensors: $\mathrm{Sp}A = A^i{}_i = A_i{}^i$

4-Einheitstensor

$\delta^i_k := \delta^i{}_k = \delta_k{}^i = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$ symm.!

$\delta^i_k a^k = a^i$, $\delta^i_k A^{kl} = A^{il}$ usw.

Metrischer Tensor

$$g^{ik} := \delta^{ik} = \begin{cases} \delta^i_k & \text{für } k=0 \\ -\delta^i_k & \text{für } k=1,2,3 \end{cases} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} = g_{ik}$$

$$\underline{g^{ik} a_k} = \delta^{ik} a_k = \begin{cases} a_i & \text{für } i=0\\ -a_i & \text{für } i=1,2,3\end{cases} = \underline{a^i}$$

„Heben oder Senken der Indizes durch g^{ik} bzw. g_{ik}"

Lorentz-Trafo (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^i = U^i{}_k x^k} \qquad U^i{}_k = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ für } v \parallel x^1$$

Invarianz des Skalarprodukts:

$$a'^i = U^i{}_k a^k, \quad b'^i = U^i{}_k b^k \Rightarrow \boxed{b'_i = U_{ik} b^k = U_i{}^k b_k}$$

$$a'^i b'_i = U^i{}_k U_i{}^l a^k b_l \overset{!}{=} a^k b_k \Rightarrow \boxed{U^i{}_k U_i{}^l = \delta^l_k}$$

U orthogonale Trafo

Umkehr-Trafo:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^i = U_k{}^i a'^k \\ a_i = U^k{}_i a'_k \end{array}}, \text{ denn } U_k{}^i U^k{}_l a^l = \delta^i_l a^l = a^i \quad \square$$

Transformationsverhalten des 4-gradienten

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x'^k}\underbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}}_{U^k{}_i} = U^k{}_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^k}}_{\partial'_k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ transformiert sich wie } a_i \text{ (kovariant)}$$

Analog: $\frac{\partial}{\partial x_i}$ transf. sich wie a^i (kontravariant)