

English Summary:

7. Relativistic quantum theory

7.1 Covariant notation of relativity

Principle of Relativity: $(ds)^2 := (c dt)^2 - (d\vec{r})^2$ invariant under Lorentz transformations between inertial systems

contravariant components $x^\alpha := ct, x^\alpha, \alpha=1,2,3$
covariant components $x_\alpha := ct, x_\alpha := -x^\alpha$ } $(ds)^2 = dx^i dx_i$

4-momentum $p^i := m_0 c u^i = \begin{pmatrix} E/c \\ m(t) v^\alpha \end{pmatrix}$ $\square = -\partial_i \partial^i$
 $m(t) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}$

$$p^i p_i = m_0^2 c^2$$

$$E = m(t) c^2$$

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p_r^2$$

Lorentz transform $x'^i = U^i_k x^k$, $U^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.2 Klein-Gordon-Gleichung

Die nichtrelativist. Schrödingergl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$
folgt aus der nichtrelativist. Energie-Impulz-Beziehung

$$H = \frac{1}{2m} (\underline{p} - e\underline{A})^2 + V$$

mit der Ersetzung

$$\underline{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \underline{\nabla} \quad (\text{Ortdarstellung})$$

Forderungen an eine relativist. Formulierung (Ortdarstellung):

(1) Beschreibung des Zustandes durch Wellenfkt.

$\psi(q, t)$, wobei q Bahn- und Spinvariable

enthält und $|\psi(q, t)|^2$ Aufenthaltswahrsch.dichte

zu Zeit t .

(2) lineare Dynamik $L\psi = 0$

(wegen Superpositions-Prinzip: mit ψ_1, ψ_2 auch $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ lös.)

Dgl. 1. Ordnung, damit Zeitentwicklung durch Anfangszustand $\psi(q, 0)$ eindeutig bestimmt ist:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

(3) Physikal. Observable \rightarrow hermitesche Operatoren

Messwerte

\rightarrow Eigenwerte des Op.

$$\hat{A} |a\rangle = a |a\rangle$$

Mittelwert der Messung \rightarrow Erwartungswert $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

(4) Es gibt vollständige Sätze vertauschbarer Op. \hat{A}_i mit gemeinsamen Eigenzuständen $|a_1, a_2, \dots\rangle$:

$$\hat{A}_i |a_1, a_2, \dots\rangle = a_i |a_1, a_2, \dots\rangle$$

$$\langle a'_1, a'_2, \dots | a_1, a_2, \dots \rangle = \delta_{a'_1/a_1} \delta_{a'_2/a_2} \dots \quad \text{orthonormiert}$$

$$\sum_{a_1, a_2, \dots} |a_1, a_2, \dots\rangle \langle a_1, a_2, \dots| = 1 \quad \text{vollständig}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a_1, a_2, \dots} c(a_1, a_2, \dots, t) |a_1, a_2, \dots\rangle \quad \text{Entwicklung}$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ die Messwerte a_1, a_2, \dots zu messen:

$$|c(a_1, a_2, \dots)|^2 = |\langle a_1, a_2, \dots | \psi(t) \rangle|^2$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} \quad \text{wird mit } E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad \text{auf}$$

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta} \psi$ führen: nicht akzeptabel!

nichtanalyt. Fkt. eines Op. ⚡

Ausweg: $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2$ liefert

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = (m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta) \psi$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi = \square \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi$$

Klein-Gordon-Gl.

Lorentz-invariant, falls ψ ein Lorentz-Skalar ist,
da $\square = -\partial_i \partial_i$ Lorentz-invariant ist
(Skalarprodukt eines 4-Vektors)

Einwände gegen die Klein-Gordon-Gl.:

(i) Der Spin kann nicht berücksichtigt werden,
denn ein Zusatz $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \hat{p} \cdot \underline{E}$
wäre nicht Lorentz-invariant!
kein Skalarprodukt
von 4-Vektoren

(ii) Dgl. 2. Ordnung in $t \Rightarrow$ Anfangswert $\psi(t, 0)$ und $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, 0)$
notwendig

(iii) Kontinuitätsgl. (Wahrscheinlichkeitserhaltung):

Lorentz-invariante Form $\partial_i J^i = 0$, J^i 4-Stromdichte

mit $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x^x}$ folgt

$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} J^0 + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^3 \partial_x J^\alpha}_{\text{div } \underline{J}} = 0 \Rightarrow \frac{J^0}{c}$ hat Bedeutung einer
räumlichen Wahrscheinl. dichte

Aus der Klein-Gordon-Gl.

$$\partial^i \partial_i \psi = - \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi \quad | \psi^*$$

1. Hgt durch c.c.

$$\partial^i \partial_i \psi^* = - \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi^* \quad | \cdot \psi$$

subtr.

$$\Rightarrow \psi^* \partial^i \partial_i \psi - \psi \partial^i \partial_i \psi^* = - \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \underbrace{(\psi^* \psi - \psi \psi^*)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_i (\underbrace{\psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^*}_{=: J^i}) = 0$$

4-Stromdichte

$\Rightarrow J^0 = \psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^* = \frac{1}{c} (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*)$ kann nicht als räumliche Wahrscheinl. Dichte interpretiert werden, da J^0 negativ werden kann (stattdessen: Ladungsdichte).

Lösung der Klein-Gordon-Gl. für freie Teilchen:

$$\psi = \psi_0 \exp \{ i \{ \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t \} \} \quad \text{ebene Welle}$$

$$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = - \left(\frac{\omega}{c} ct - \underline{k} \cdot \underline{r} \right) = - k^i x_j \quad \textcircled{+} = - k_j x^j$$

$$\text{mit } k^0 = \frac{\omega}{c} = k_0$$

$$k^x = -k_x$$

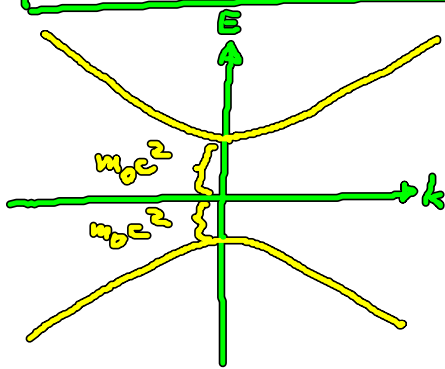
$$\psi = \psi_0 \exp \{ -i k^j x_j \} \quad \text{eingesetzt in } -\partial^i \partial_i \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi:$$

$$-\partial^i \partial_i \psi = i k^i \partial^i \psi_0 \exp \{ -i k_j x^j \} = k^i k_j \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi$$

$$\Rightarrow k^j k_j = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \underline{k}^2 = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \quad \textcircled{+}$$

$$\omega^2 = c^2 \left[\left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 + \underline{k}^2 \right]$$

$$E = \hbar\omega = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + (\hbar k)^2}$$



Nichtrelativist. Grenzfall:

$$E = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar k}{m_0 c}\right)^2}$$

$$\approx \pm m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar k}{m_0 c}\right)^2 \right]$$

$$= \pm \left[m_0 c^2 + \frac{(\hbar k)^2}{2m_0} \right]$$

(für $\hbar k \ll m_0 c$)

$E > 0$: Teilchen mit Ruheenergie $m_0 c^2$.

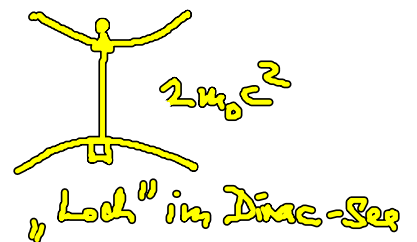
$E < 0$: Teilchen mit Ruheenergie $-m_0 c^2 \Rightarrow$ neg. Masse

Interpretation (Dirac): alle Zustände mit $E < 0$ sind im Grundzustand besetzt.

Einstahlung von Energie $> 2m_0 c^2$:

Teilchen - Antiteilchen - Erzeugung

(= feldendes Teilchen mit $n < 0, q$)
 (= Antiteilchen mit $n > 0, -q$)



7.3 Dirac-Gleichung für Elektronen

Die zeitliche Entwicklung soll eindeutig durch Anfangszustand $\psi(x, 0)$ festgelegt sein

\rightarrow Dgl. 1. Ordnung in der Zeit t : $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$

Lorentz-Kovarianz: Dgl. muss auch 1. Ordn. in $\frac{\partial}{\partial x}$ sein
 (Invarianz) (Symm. Raum-Zeit)

$$H = c \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta \rightarrow \frac{\hbar}{i} c \underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla} + m_0 c^2 \beta$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i\hbar c \underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla} \psi + m_0 c^2 \beta \psi$$

Dirac-Gl.

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{\nabla} = \alpha^1 \partial_1 + \alpha^2 \partial_2 + \alpha^3 \partial_3 = \sum_{\mu=1}^3 \alpha^\mu \partial_\mu$$

Konsequenzen

- (i) Wegen Isotropie des Raumes können $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ keine Zahlen sein (sonst ist H nicht rotationsinvar.)
 $\rightarrow \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ sind Matrizen (Operatoren!)
 $\Rightarrow \beta$ ebenfalls Matrix
- (ii) Wegen Lorentz-Kovarianz können α, β nicht auf Bahnvariable \underline{r} wirken \Rightarrow Spin-Operatoren
(zusätzl. Freiheitsgrade)

$$\psi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_S$$

Bahn Spin

Darstellung der Spin-Freiheitsgrade durch n -dim. Spaltenvektor (Spinor) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta : n \times n$ Matrizen

Es gilt $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (kommutieren)

(iii) $\hat{H}, \hat{\beta}$ hermitisch

$$\Rightarrow \hat{H}^\dagger = c \hat{\beta}^\dagger \cdot \underline{\alpha}^\dagger + m_0 c^2 \hat{\beta}^\dagger = c \hat{\beta} \cdot \underline{\alpha}^\dagger + m_0 c^2 \hat{\beta}^\dagger \stackrel{!}{=} \hat{H}$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha^\dagger = \alpha \\ \beta^\dagger = \beta \end{array} \right\} \underline{\text{hermitisch}}$$

(iv) Iteration der beiden Seiten der Dirac-Gl. \rightarrow Klein-Gordon

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta) \psi \quad \text{Dirac-Gl.}$$

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi &= (c \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta)(c \underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta) \psi \\ &= [c^2 (\underline{\alpha} \cdot \underline{p})(\underline{\alpha} \cdot \underline{p}) + m_0 c^3 (\underline{\alpha} \cdot \underline{p} \beta + \beta \underline{\alpha} \cdot \underline{p}) + m_0^2 c^4 \beta^2] \psi \\ &= [c^2 \sum_{\mu, \nu=1}^3 (\alpha^\mu \alpha^\nu p^\mu p^\nu) + m_0 c^3 \sum_{\mu=1}^3 (\alpha^\mu \beta + \beta \alpha^\mu) p^\mu + m_0^2 c^4 \beta^2] \psi \\ &\stackrel{!}{=} [c^2 p^2 + m_0^2 c^4] \psi \quad \text{Klein-Gordon-Gl.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu, \nu=1}^3 \alpha^\mu \alpha^\nu \rho^\mu \rho^\nu = (\rho)^2$$

$$\begin{aligned} \alpha^\mu \rho^\mu + \rho^\mu \alpha^\mu &= 0 \\ \rho^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (\alpha^\mu)^2 &= 1 \\ \alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (\rho \neq \nu)$$

α^μ, ρ antikommutieren!