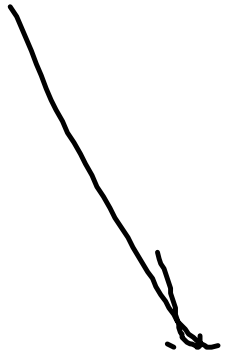


u



u

Anknüpfung an die letzte VL:

Argumentationsstruktur:

Master-gl: Evolutionsgleichung  
linear Wahrscheinlichkeits-  
dichte  $P(x, t)$  auf Basis  
von Übergangswahrscheinlich-  
keiten  $W$  von  $x$  nach  $x'$   
und umgekehrt

Annahme:  $W$  sei nur signifikant  
von 0 verschieden, wenn  
 $x$  nahe  $x'$

o Kramers-Moyal Entwicklung  
für kleine Schrittlängen

$$\Delta = x - x'$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n H^{(n)}(x, t) P(x, t) \right]$$

mit  $H^{(n)}$   
 $H(x, t)$ : Kramers-Moyal  
Koeffizient  
n-ter Ordnung

Nehme an, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten  $w$  so schnell mit  $\Delta$  abfallen, dass

$$H^{(n)} \approx 0, \quad n \geq 3$$

Sodass wir die Reihe nach dem nach dem zweiten Koeff. abbrechen können.

(diese sind exakt gleich 0 für gauss-verteiltes Rauschen)

Man erhält die Fokker-Planck-Gl.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} H^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H^{(2)}(x, t) \right] P(x, t)$$

(für eine dynamische Variable)

analog für mehrere dyn. Variablen

$$x_i, i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \left[ - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} H^{(1)}(\{x\}, t) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} H^{(2)}(\{x\}, t) \right] P(\{x\}, t)$$

$=: \hat{L}_{FP}$

Man kann obiges in Form einer Kontinuitätsgleichung schreiben,

in dem man einen Strom  $\mathcal{J}_i$  einführt und obiges darstellt als

$$\mathcal{J} = H^{(1)} P(x, t) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} H_{ij}^{(2)} P$$

einführt und obiges darstellt als

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \underbrace{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{J}_i}_{= \nabla \cdot \mathcal{J}} = 0$$

Dies drückt die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\int dx P(\{x\}, t) = 1 \quad \forall t$$

# Von der Langevin-Gl zur Fokker-Planck-Gl.

Langevin:

nicht-überdämpft:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v}$$

$$\dot{\underline{v}} = -\gamma \underline{v} + \frac{1}{m} \underline{f}(z)$$

überdämpften Fall:

$$0 = -\gamma \underline{v} + \frac{1}{m} \underline{f}(z)$$

$$\Leftrightarrow \gamma \underline{v} = \frac{1}{m} \underline{f}(z)$$

Kommentar zu möglichen verschiedenen  
aber äquivalenten Notationen

Manchmal

$$\dot{\underline{v}} = -\frac{\gamma}{m} \underline{v} + \frac{1}{m} \underline{f} \quad (\text{Newton})$$

Manchmal wird auch dies  
mit  $\gamma$  bezeichnet.

(nennen wir es hier mal  $\tilde{\gamma}$ )

$$\Rightarrow \dot{v} = -\tilde{f} v + \frac{1}{m} f$$



Rauschen der Kraft

Manchmal schreibt man das  $\frac{1}{m}$  in das  $f$  rein

$$\Rightarrow \dot{v} = -\tilde{f} v + \tilde{f}$$

Je nach Verwendung von  $f$  oder  $\tilde{f}$  ändert sich die Bedeutung von  $\Gamma$  bzw.  $\tilde{\Gamma}$  um einen Faktor  $\frac{1}{m^2}$

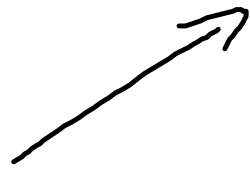
verallgemeinerte Langevin-Gl.:

$$\dot{x}_i(t) = h_i(\{x(t)\}, t)$$

$$\nearrow + \sum_{j=1}^n D_{ij}(\{x\}, t) f_j(t)$$

deterministisch.  $d$   
(Drift-Term)

prop. Rauschen  
(Diffusions-Term)



und  $\underline{x}(t)$ : Vektor, der alle dynamischen Variablen enthält.

gls

Bewegungsgleichung für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(\{\underline{x}\}, t)$

Man kann zeigen, dass sich die Kramers-Moyal-Koeffizienten auch darstellen kann als:

$$K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(\{\underline{x}\}, t)$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( (x_{i_1}(t+\tau) - x_{i_1}(t)) \cdot (x_{i_2}(t+\tau) - x_{i_2}(t)) \cdot \right.$$

$\vdots$

$$\left. (x_{i_n}(t+\tau) - x_{i_n}(t)) \right)$$



berechenbar aus  
Langevin-Gl.

formale Integration liefert:

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dt' h_i(\{x\}, t') + \sum_j D_{ij}(\{x\}, t') f_j(t')$$

Stochastische  
Integration

Ergebnis (nach Stratonovich-Regel)

$$K_i^{(1)} = h_i(\{x\}, t)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} D_{kj}$$

rausch-induzierter Drift

Wurde ungleich 0 für multiplikatives  
Rauschen (d.h.  $\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \neq 0$ )



# Beispiel

nicht überdämpfte Langevin-Gl.  
für 1 Brownsches Teilchen

$$\dot{x}^0 = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m} f$$

Identifikation

$$h_x = v$$

$$h_v = -\gamma v$$

} →

$$K_x^{(1)} = v$$

$$K_v^{(1)} = -\gamma v$$

Ergebnis: zweiter Kravars-  
Moyal-  
Koeff.

$$K_{ij}^{(2)}(\{x\}, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} D_{i\kappa} D_{\kappa j}$$

im Beispiel:

$$D_{xx} = 0, \quad D_{xv} = 0, \quad D_{vx} = 0$$

$$D_{vv} = \frac{1}{m}$$

# Zurück zur Fokker-Planck-Gleichung.

Fokus: 1 Teilchen in 1D

überdämpfte Bewegung, kein externes Potential

$$0 = -\gamma v + \frac{1}{m} f$$

$$\Rightarrow \gamma \dot{x} = \frac{1}{m} f$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{\gamma m} f$$

(also wieder nur additives Rauschen)

Identifikation:

$$h_x = 0 \Rightarrow K_x^{(1)} = 0$$

$$D_{xx} = \frac{1}{m^2 \gamma} \Rightarrow K_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{m^2 \gamma^2}$$

Einsetzen in den Ausdruck für die Fokker-Planck-gl

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \hat{L}_{FP} p$$

$$\text{mit } \hat{L}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x} K_x^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{xx}^{(2)}$$

Also

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) \right] = 0$$

Erkannste und  
erwartete Diffusions-gl.  
(für überdämpftes Teilchen  
ohne externe Kräfte)

### Anderes Beispiel

nicht-überdämpftes Teilchen in  
einem externen Potential.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m} f + \frac{1}{m} \left( -\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right)$$

dynamische Variablen:  $x, v$

o Kramers -oyal:

$$h_x = v$$

$$h_v = -\gamma v + \frac{1}{m} \left( -\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right)$$

$$D_{xx} = 0$$

$$D_{vv} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow K_x^{(1)} = v, \quad K_v^{(1)} = -\gamma v + \frac{\gamma}{m} \left( -\frac{\partial}{\partial x} u(t) \right)$$

$$K_{xx}^{(2)} = 0, \quad K_{vv}^{(2)} = \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma}{m^2}, \quad K_{xv}^{(2)} = K_{vx}^{(2)} = 0$$

$\Rightarrow$  zugehörige Fokker-Planck-Gl.  
(KM-Koeff. einsetzen)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, v, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\gamma}{m} \left( -\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right) - \gamma v \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] P(x, v, t)$$

Stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

Betrachte System mit linear  
dyn. Variable  $x$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}(x, t) = 0$$

mit

$$\mathcal{A}(x, t) = \left( K^{(1)}(x) - \frac{\partial}{\partial x} K^{(2)}(x) \right) P(x, t)$$



erfrachte nun das System  
im therm. Gleichgewicht.

$$\Leftrightarrow \eta = 0$$

(schwächer  $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$  : stationärer Fall)

aus  $\textcircled{1}$

$$K^{(1)}(x) p^{eq}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( K^{(2)} p^{eq}(x) \right)$$

erweitern liefert

$$\frac{K^{(1)}(x)}{K^{(2)}} K^{(2)} p^{eq} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K^{(2)} p^{eq} \right)$$
$$\int_c^x dx' \frac{K^{(1)}(x')}{K^{(2)}(x')}$$

$$\Rightarrow K^{(2)} p^{eq} = \alpha e$$

$$\text{bzw. } p^{eq}(x) = \frac{\alpha}{K^{(2)}} e - \phi(x)$$

=  
einsetzen  
auf  
Form

$$\text{mit } \phi(x) = \ln K^{(2)}(x) - \int_c^x dx' \frac{K^{(1)}(x')}{K^{(2)}(x')}$$

# Beispiel

1 nicht-überdämpftes Teilchen,  
kein äußeres Feld

o dynamische Variable:  $v$

Langevin-Gl:  $\dot{v} = -\gamma v + f$

$$\Rightarrow h_v = -\gamma v \rightarrow K^{(1)} = -\gamma v$$
$$D_{vv} = 1 \rightarrow K^{(2)} = \frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \phi(v) = \underbrace{\ln \frac{\Gamma}{2}}_{= \text{const}} - \int_0^v dv' \cdot \frac{-\gamma v'}{\frac{\Gamma}{2}}$$

setze  
Fluktuations-  
Dissipations-  
relationen

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{\gamma}{\Gamma} v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m v^2 \cdot \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^{eq}(v) \sim e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2}}$$

Maxwell-Boltzmann-  
Verteilung