

2.3.1 Gradient & Nablaoperator

$$dU = \text{grad} U \cdot d\underline{r} \stackrel{!}{=} \underline{\nabla} U \cdot d\underline{r} \quad (2.6)$$

kartes. Koord.: $\underline{\nabla} = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$= \sum_i \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \underline{e}_i \nabla_i \quad (2.7)$$

2.3.2 Divergenz eines Vektorfeldes

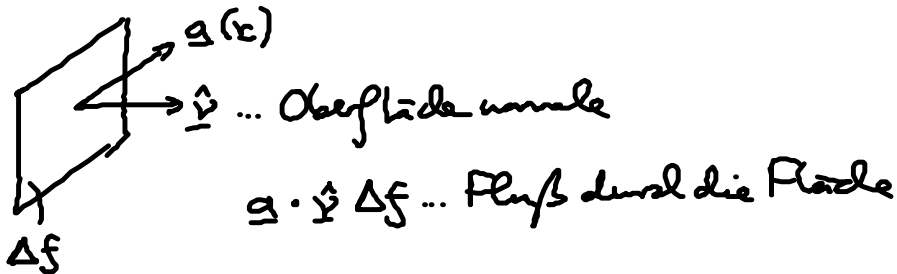
• Def.: $\text{div } \underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{a}(\underline{r}) \quad (2.8)$

... Quellenfeld von $\underline{a}(\underline{r})$

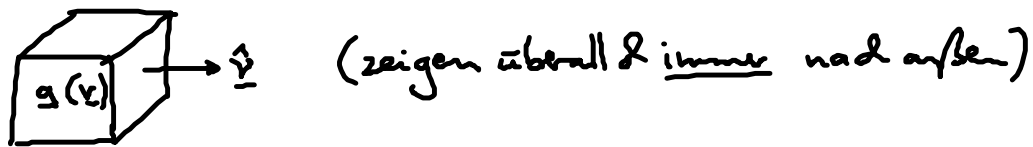
• kartesische Koord.: $\text{div } \underline{a} = \frac{\partial}{\partial x_i} a_i = \nabla_i a_i \quad (2.9)$

• Bedeutung:

(i) kleine Fläche Δf :



(ii) kleines Volumen ΔV



$$q(\underline{r}) \Delta V \quad \text{mit } q(\underline{r}) = \text{div } \underline{a} = \underline{\nabla} \cdot \underline{a} \quad (2.10)$$

... Fluß aus ΔV heraus

Beweis: s. Übungen

$$q(x) = \operatorname{div} \underline{a} = \begin{cases} > 0, & \text{Quelle von } \underline{a} \\ < 0, & \text{Senke von } \underline{a} \\ = 0, & \text{was rein fließt, fließt raus} \end{cases}$$

Bsp: (1) $\operatorname{div} \underline{D} = \rho$... Ladungen sind Quellen des elektr. Feldes

(2) $\operatorname{div} \underline{B} = 0$... keine magnet. Monopole

• krummlinige Koord.: s. Übungen

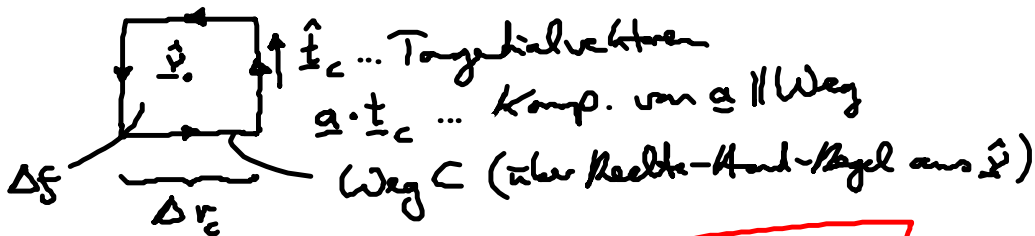
2.3.3. Rotation eines Vektorfeldes

• Def: $\operatorname{rot} \underline{a}(x) = \nabla \times \underline{a}(x)$ (2.11)

... Wirbelfeld von $\underline{a}(x)$

• kartesische Koord.: $(\operatorname{rot} \underline{a})_i = (\nabla \times \underline{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k$ (2.11a)

• Deutung: kleines orientiertes Flächenelement $\Delta \underline{f}$:



$$\text{Verwirbelung / Zirkulation von } \Delta \underline{f} = \Delta \underline{f} \cdot \hat{n} \quad (2.12)$$
$$\sum_C \underline{a} \cdot \hat{t}_c \Delta r_c = \operatorname{rot} \underline{a} \cdot \Delta \underline{f}$$

$\rightarrow \underline{\omega} = \operatorname{rot} \underline{a}$... lokale Wirbelstärke

Beweis: s. Übungen

Bsp: (1) $\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$... \underline{E} zirkuliert um \underline{B}

(2) $\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$... \underline{H} " um \underline{j} und \underline{D}

• kumul. Koord.: (s. Übungen)

• Anwendungen:

(i) **Gradientfelder sind wirbelfrei** (2.13)
 $\underline{a} = \text{grad } U \iff \text{rot } \underline{a} = 0$
(im einfach zusammenhängenden Gebiet)

Bew: \rightarrow klar
 \leftarrow „schwieriger“

(ii) **Wirbelfelder sind quellfrei** (2.14)
 $\text{div } \underline{B} = 0 \iff \underline{B} = \text{rot } \underline{A}$

Bew: \leftarrow klar
 \rightarrow „schwieriger“

(iii) Laplace-Operator: $\underline{\Delta}^2 = \underline{\Delta} \cdot \underline{\Delta}$ (2.15)

kartesische Koord.: $\underline{\Delta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (2.16)

2.3.4 Fundamentalsatz der Vektoranalysis (Helmholtz Theorem) (2.17)

„Quelle & Wirbel in Vol. V bestimmen \underline{a} eindeutig“

$$\underline{a}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{a}_t(\underline{r})}_{\substack{\underline{\omega} = \text{rot } \underline{a} = \text{rot } \underline{a}_t \\ \text{div } \underline{a}_t = 0 \\ \text{Wirbel!}}} + \underbrace{\underline{a}_l(\underline{r})}_{\substack{\underline{\rho} = \text{div } \underline{a} = \text{div } \underline{a}_l \\ \text{rot } \underline{a}_l = 0 \\ \text{Quellen}}} + \underbrace{\underline{a}_R(\underline{r})}_{\substack{\text{div } \underline{a}_R = \text{rot } \underline{a}_R = 0 \\ \text{für Randbed.} \\ \underline{\Delta} \cdot \underline{a} = f(\underline{r}), \underline{r} \in \partial V}}$$

NB: Maxwell-Gleichungen
= Glm. für Quellen/Wirbel von $\underline{E}, \underline{B}$

• Bsp: ebene Welle: $\underline{a} = \underline{a}_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}}$

$\text{div } \underline{a} = i \underline{k} \cdot \underline{a}_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} \rightarrow$ Transversalwellen ($\underline{a}_0 \perp \underline{k}$)
 $= i \underline{k} \cdot \underline{a}$ sind quellfrei

„Rand von V “

$$\operatorname{rot} \underline{a} = i \underline{k} \times \underline{a}_0 e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} = i \underline{k} \times \underline{a}$$

→ Longitudinalwellen ($\underline{a}_0 \parallel \underline{k}$)
sind wirbelfrei

• Beweis von (2.17): mit ∂V im Unendlichen → $\underline{a}_R = \underline{0}$

(i) Konstruktion von \underline{a}_l aus $\varrho = \operatorname{div} \underline{a} = \operatorname{div} \underline{a}_l$

$$\operatorname{rot} \underline{a}_l = 0 \rightarrow \underline{a}_l = \operatorname{grad} \varphi = \underline{\nabla} \varphi$$

$$\operatorname{div} \underline{a}_l = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \varphi = \boxed{\nabla^2 \varphi = \varrho} \quad (2.18)$$

... Poissongleichung

$$\text{o.B.} \rightarrow \varphi(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{a}_l(\underline{r}) = \underline{\nabla} \varphi(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \int \frac{\operatorname{div} \underline{a}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'} \quad (2.19)$$

(ii) Konstruktion von \underline{a}_t aus $\underline{\omega} = \operatorname{rot} \underline{a} = \operatorname{rot} \underline{a}_t$

$$\operatorname{div} \underline{a}_t = 0 \rightarrow \underline{a}_t = \operatorname{rot} \underline{A}$$

$$\operatorname{rot} \underline{a}_t = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{A} = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \underline{A}}_{=0 \text{ [zeige nachher]}} - \nabla^2 \underline{A} = \underline{\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 \underline{A} = -\underline{\omega}} \quad (2.20)$$

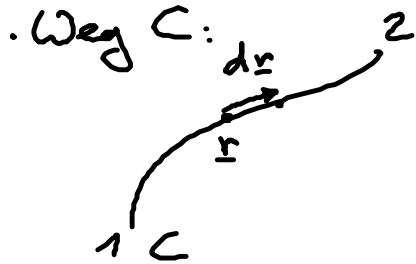
$$\rightarrow \underline{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\omega}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'$$

Zeige selbst $\operatorname{div} \underline{A} = 0!$

$$\rightarrow \boxed{\underline{a}_t(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \times \int \frac{\operatorname{rot} \underline{a}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'} \quad (2.21)$$

2.4. Integration von Feldern

2.4.1. Linienintegrale



Parameterdarstellung

$$\underline{r} = \underline{r}(s) \rightarrow d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{ds} ds$$

s.. Bogenlänge $\rightarrow \underline{\hat{t}} = \frac{d\underline{r}}{ds}$ mit $|\underline{\hat{t}}| = 1$

$$\int_C \underline{a}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_C \underline{a}(\underline{r}(s)) \cdot \frac{d\underline{r}}{ds} ds \quad (2.22)$$

Wegunabhängigkeit:

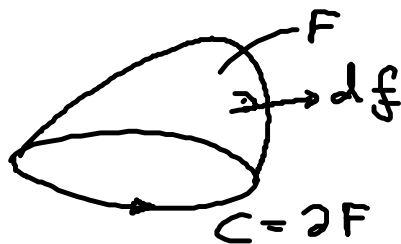
$$\oint \underline{a} \cdot d\underline{r} = 0 \iff \underline{a}(\underline{r}) = \nabla \varphi \iff \text{rot } \underline{a} = 0 \quad (2.23)$$

Bew: erst \leftarrow :

$$\int_C \underline{a} \cdot d\underline{r} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\underline{r} \stackrel{(2.6)}{=} \int_C d\varphi = \varphi(2) - \varphi(1)$$

2.4.2 Satz von Stokes

Geometrie:



(orientierte Fläche)

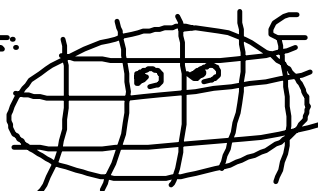
(Umlaufsin über Rechte-Hand-Regel mit $d\underline{f}$)

$$\int_F \text{rot } \underline{a} \cdot d\underline{f} = \oint_{C=\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{r} \quad (2.24)$$

Fluß von $\text{rot } \underline{a}$ durch F

Zirkulation von \underline{a} entlang $C = \partial F$

Beweis:



(1) Zerlege F in gleich orientierte Flächenelemente $\Delta \underline{f}$

(2) Berechne Zirkulation für $\Delta \underline{f}$
 $\underline{a} \cdot d\underline{r}$ benachbarter Elemente heben sich weg

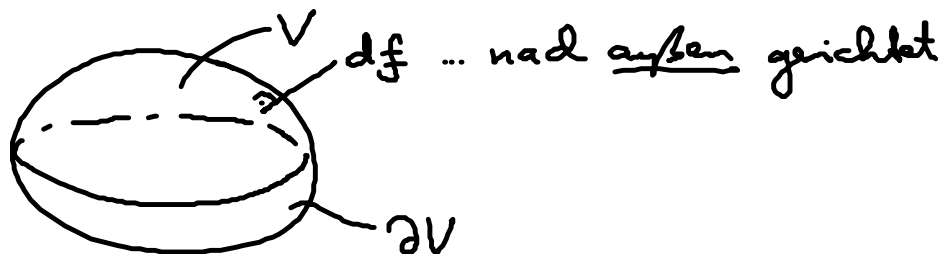
\rightarrow Aufsummation: $\oint \underline{a} \cdot d\underline{r}$

(3) (2.12) für jedes $\Delta \underline{f}$: $\text{rot } \underline{a} \cdot \Delta \underline{f}$

→ Aufsummiert $\int_V \operatorname{rot} \underline{a} \cdot d\underline{f}$ geht

2.4.3 Satz von Gauß

• Geometrie:



$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \underline{a} \, dV = \int_{\partial V} \underline{a} \cdot d\underline{f}} \quad (2.25)$$

Quelle von \underline{a}
in V
Fluß von \underline{a}
durch ∂V

• Beweis: (1) $V = \sum_i \Delta V_i$ mit $\Delta V_i \dots$ kleine Quader

(2) $\int_{\partial \Delta V_i} \underline{a} \cdot d\underline{f} \stackrel{(2.10)}{=} \operatorname{div} \underline{a}(\underline{r}_i) \Delta V_i$ \underline{r}_i

(3) benachbarte Quader: $\underline{a} \cdot d\underline{f}^i$ von beiden Quadern hebt sich weg

$$\rightarrow \sum_i \int_{\partial \Delta V_i} \underline{a} \cdot d\underline{f}^{(i)} = \int_{\partial V} \underline{a} \cdot d\underline{f}$$

$$\stackrel{(2.10)}{=} \sum_i \operatorname{div} \underline{a}(\underline{r}_i) \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \underline{a} \, dV \quad \text{geht}$$

• abgeleitete Formen aus (2.25)

(1) $\underline{a} = g \underline{e}_i \xrightarrow{(2.25)} \boxed{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} g \, dV = \int_{\partial V} g \, d f_i}$ (2.26) ← i-te Komponente von $d\underline{f}$

(2) $g = \underline{a}_j \xrightarrow{i \neq j} \boxed{\int_V \operatorname{rot} \underline{a} \, dV = \int_{\partial V} d\underline{f} \times \underline{a}}$ (2.27)

(3) Greensche Identitäten:

$$\underline{a}_1 = \varphi \underline{\nabla} \psi \quad \underline{a}_2 = \gamma \underline{\nabla} \psi$$

1. Identität:

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{g}_1 dV \xrightarrow{(2.25)} \int_V (\underline{\nabla} \varphi \cdot \underline{\nabla} \varphi + \varphi \nabla^2 \varphi) dV = \int_{\partial V} \varphi \underline{\nabla} \varphi \cdot d\underline{f} \quad (2.28)$$

2. Identität: $\int_V (\underline{\nabla} \cdot \underline{g}_1 - \underline{\nabla} \cdot \underline{g}_2) dV \xrightarrow{(2.28)}$

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \varphi) dV = \int_{\partial V} (\varphi \underline{\nabla} \varphi - \varphi \underline{\nabla} \varphi) \cdot d\underline{f} \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \varphi = g$$