3. Elektrostatik

• behandelt elektr. Felder ruhender oder langsam bewegter elektr. Ladungen

3.1 Bemerkungen zur elektrischen Ladung

• Erfahrung: **Es gibt zwei Arten von Ladungen, positive und negative**

• Ladung ist diskret.

$\longrightarrow$ Elementarladung: $e_0 = 1{,}60218 \; 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Proton p: $+e_0$, Radius $a(p) \approx 10^{-15}\,\mathrm{m}$

Elektron e: $-e_0$, " $a(e) < 10^{-15}\,\mathrm{m}$

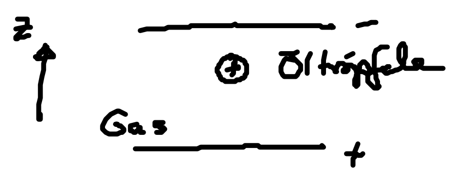
Quarks: $\pm \frac{2}{3} e_0 / \pm \frac{1}{3} e_0$, aber nicht frei, sondern nur in Kombination zu $0, \pm e_0$

• Einheit der Ladung:

$$\boxed{1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}} \qquad (3.1)$$

... Ladung, die in 1 Sekunde bei einem Strom von 1 Ampère durch Leiter fließt!

• Messung der Elementarladung: Millikan-Versuch



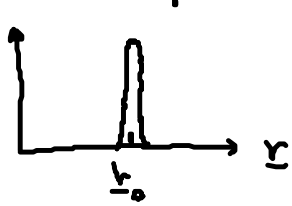
$$m\ddot{z} = qE - 6\pi\eta a\dot{z} - gm \qquad (3.2)$$

• Ladungsdichte:

(1) Proton, Elektron etc ... Ladung q auf kleinstem Raum = Punktladung mit Dichte $q\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$

NB: Delta-Funktion $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ mit $\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,d^3r = 1$

$\longrightarrow [\delta] = \frac{1}{m^3}$



(2) viele Punktladungen q_i:

Ort der Pkt. Ladg q_i

Dichte $\boxed{\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_i)}$ (3.3)

(3) Punktladungen mit kleinsten Abständen

$\longrightarrow$ kontinuierliche Ladungsdichte: $\rho(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ (3.4)

Ladung in Vol. V: $Q = \int_V \rho(\underline{r}) \, d^3 r$ (3.5)

- Ladungserhaltung:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aller Ladungen konstant

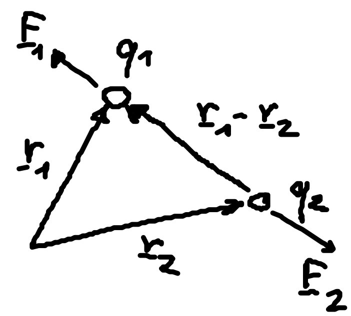
3.2 Coulombsches Gesetz & elektr. Feld

- Erfahrung: (i) $\left.\begin{array}{l}\text{abstoßende}\\ \text{anziehende}\end{array}\right\}$ Kraft zwischen $\left\{\begin{array}{l}\text{gleichnamige}\\ \text{un " \quad "}\end{array}\right.$ Ladungen

  (ii) Kraft = Vektor im Sinne der Newtonschen Mechanik $\longrightarrow$ Superpositionsprinzip

- Coulombsches Gesetz:

  Kraft, die Ladung q_2 am Ort $\underline{r}_2$ auf eine Ladung q_1 am Ort $\underline{r}_1$ ausübt:



$$\boxed{\underline{F}_1 = k \, q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} = -\underline{F}_2} \quad (3.6)$$

NB: (1) $\underline{F} \sim \frac{1}{r^2}$, wie Gravitationskraft

aber abstoßend/anziehend wegen $\underline{F} \sim q_1 q_2$

(2) <u>SI-System</u>: wird hier angewendet!

Ladungseinheit [C] ⎫
Kraft " [N] ⎭ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (3.7)

mit $\varepsilon_0 \simeq 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

... Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$\left[1\,\text{Farad} = 1F = 1\frac{C}{V} = 1\frac{As}{V} = 1\frac{A^2s^2}{m^2}\right]$

(3) Test des Gesetzes:

$$F \sim \frac{1}{r^{2+\varepsilon}}, \quad \varepsilon < 3 \cdot 10^{-16}$$

$$F \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^2}, \quad \xi > 10^{8}\,m \longleftrightarrow \text{Photonmasse: } m_\gamma < 10^{-50}\,kg$$

• Kraft auf Testladung q_0 am Ort $\underline{r}_0$ von Ladungen q_i:

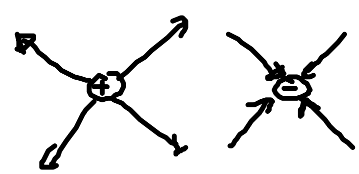
$$\boxed{\underline{F} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \frac{\underline{r}_0 - \underline{r}_i}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_i|^3}} \quad (3.7)$$

... <u>Fernwirkungsstandpkt.!</u>

• Nahwirkungsstandpkt.:

(1) Ladungen q_i erzeugen elektr. Feld:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}} \quad (3.8)$$



<u>NB:</u> $\underline{E}$ zeigt weg von $q > 0$ und auf $q < 0$

(2) Kraft auf Testladung q_0: $\boxed{\underline{F} = q_0\, \underline{E}(\underline{r})}$ (3.9)

also: Kraft durch elektr. Feld!

• kontinuierliche Ladungsverteilung: $q_i = \rho(\underline{r}_i)\, \Delta V_i$

$$(3.8) \xrightarrow[\sum_i \to \int \dots d^3r]{} \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}\, d^3r'} \quad (3.10)$$

3.3 <u>Feldgleichungen der Elektrostatik</u>

3.3.1 Grundlagen

• elektrostatisches Potential:

$\nabla |\underline{r}| = \nabla r = \frac{\underline{r}}{r}$

$$\text{mit} \quad \underline{\nabla} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \underline{\nabla} |\underline{r}-\underline{r}'| = -\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$(3.10) \longrightarrow \boxed{\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r'} \quad (3.11)$$

$$\longleftrightarrow \quad \text{rot } \underline{E} = 0 \;!!$$

Bsp.: Potential Punktladung: $\rho(\underline{r}) = q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0)$ in (3.11)

$$\longrightarrow \boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}_0|}} \quad (3.13)$$

• Quellen des elektr. Feldes:

$$\text{div } \underline{E} \overset{(3.11)}{=} -\nabla^2\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\overset{!}{=} -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')} d^3r' = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}) \quad (3.14)$$

$\longrightarrow$ Feldgleichungen der Elektrostatik:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (3.15) & \text{div } \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}) \\ (3.16) & \text{rot } \underline{E} = 0 \end{array}}$$

(3.15) … Gaußsches Gesetz
Ladungen = Quellen von $\underline{E}$

(3.16) … Wirbelfreiheit

NB: mit $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$ (im Vakuum)

$$(3.15) \longrightarrow \boxed{\text{div } \underline{D} = \rho(\underline{r})} \quad (3.17)$$

• Integrale Formulierungen:

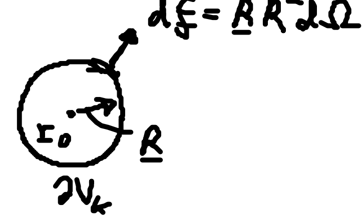
$$(1) \int_V \text{div } \underline{E}\, d^3r = \int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} \overset{(3.15)}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\underline{r})\, d^3r$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q} \quad (3.18)$$

Fluß aus V = $\frac{1}{\varepsilon_0}$ Gesamtladung

Bsp. Punktladung:

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\underline{r}-\underline{r}_0}{|\underline{r}-\underline{r}_0|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\hat{\underline{R}}}{R^2}$$



$$\oint_{\partial V_K} \underline{E}\cdot d\underline{f} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\partial V_K} \frac{\hat{\underline{R}}}{\cancel{R^2}}\cdot\hat{\underline{R}}\, \cancel{R^2}\, d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad ✓$$

(2) Arbeitsintegral:

an Pkt. Ladung q verrichtete Arbeit gegen elektr. Kraft $q\,\underline{E}$

$$W = -q\int_C \underline{E}\cdot d\underline{r} \overset{(3.11)}{=} q\int \underline{\nabla}\phi\cdot d\underline{r} = q\int d\phi$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{W = q\,\underbrace{[\phi(2)-\phi(1)]}_{\text{Spannung = Potentialdifferenz}}} \quad (3.19)$$

insbesondere: $\boxed{\oint \underline{E}\cdot d\underline{r} = 0}$ (3.20)

.... keine geschlossenen Feldlinien

= Zirkulation in Elektrostatik

3.2.2 Potentialgleichungen

- Gl. (3.14) $\longrightarrow$ $\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$ (3.21)

  $\operatorname{div}\underline{E} = -\operatorname{div}\nabla\phi$!

  ... Poisson-Gleichung

  $\rho = 0$ ... Laplace Gleichung

- Lösung:

  allgemein: $\phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r}-\underline{r}')\,\rho(\underline{r}')\,d^3r'$ (3.22)

  mit Greensche Fkt: $\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}') \overset{(3.11)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$ (3.22)

  insbesondere: $\boxed{\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \xrightarrow{(3.22)} \phi(\underline{r}) = G(\underline{r}-\underline{r}_0)}$ (3.23)

  ... G ist Lsg. für δ-Inhomogenität

- also (3.22) & (3.23) in (3.21)

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_0|} = -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_0)} \quad (3.24)$$

Beweis: $\underline{r}-\underline{r}_0 \longrightarrow \underline{r}$ und $r = |\underline{r}|$

(1) $r \neq 0$: $\nabla^2 \frac{1}{r} \overset{(3.24)}{=} 0$

explizit $\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\underline{\nabla}\cdot \frac{1}{r^2}\underbrace{\underline{\nabla} r}_{\hat{\underline{r}}} = -\underline{\nabla}\cdot\frac{\hat{\underline{r}}}{r^2}$

$= -\underline{\nabla}\cdot\frac{\underline{r}}{r^3} = -\left(\frac{1}{r^3}\underline{\nabla}\cdot\underline{r} + \underline{r}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)$

$= -\left(\frac{3}{r^3} - 3\,\underline{r}\cdot\frac{1}{r^4}\,\hat{\underline{r}}\right) = 0$ ✓

(2) $r=0$: $\int_{V_\varepsilon} \nabla^2 \frac{1}{r}\, d^3r = -4\pi$

$\underline{r}=0$
V_ε … Kugel

explizit Gauß $\int_{V_\varepsilon} \underline{\nabla}\frac{1}{r}\cdot d\underline{f} = -\int \frac{\hat{\underline{r}}}{r^2}\cdot \underbrace{d\underline{f}}_{\hat{\underline{r}}\, r^2 d\Omega}$

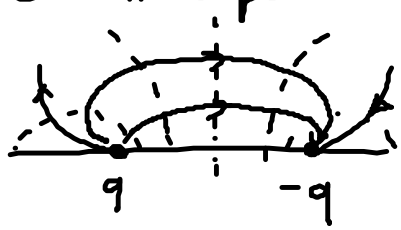
$= -\int_{V_\varepsilon} d\Omega = -4\pi$ ✓

- Feldlinien:
  - Äquipotentiallinien: ϕ = konst
  - Feldlinien $\underline{r}(s)$: (1) $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi$ ist tangential dazu

$$\frac{d\underline{r}(s)}{ds} = \frac{\underline{E}(\underline{r}(s))}{|\underline{E}(\underline{r}(s))|} \qquad (3.25)$$

(2) $\perp$ ϕ = konst

Bsp: elektr. Dipol



- - - … ϕ = konstant
—— Feldlinien