Wiederholung:

Coulomb Gesetz $\longrightarrow$ $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

$\operatorname{rot} \underline{E} = 0 \longrightarrow \underline{E} = -\operatorname{grad} \phi$

$$\Longrightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\longleftrightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3 r' \quad (**)$$

$$\longleftrightarrow G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \sum_i \frac{\overset{\rho(\underline{r})d^3r}{\downarrow}{q_i}}{|\underline{r}-\underline{r}_i'|^3} (\underline{r}-\underline{r}_i)$$

$$= q_0 \underline{E}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\underline{r})}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} (\underline{r}-\underline{r}_i) d^3 r'$$

Greensche Fkt.:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad (*)$$

lineare Dgl $\longrightarrow$ Prinzip der Superposition:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 \longrightarrow \phi_1 \\ \rho_2 \longrightarrow \phi_2 \end{array}\right\} \rho_1 + \rho_2 \longrightarrow \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') d^3 r' \xrightarrow{(**)} G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \longrightarrow \phi = G(\underline{r}-\underline{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_0|}$$

3.3.3 elektrostatische Energie

- Erinnerung:
  verrichtete Arbeit an Ladung q: $W = q\,[\phi(2) - \phi(1)]$ (3.19)

- Definiere:
  potentielle Energie von q am Ort $\underline{r}$ im Feld $\underline{E} = -\operatorname{grad}\phi$

$$\xrightarrow[\text{Referenzpkt 1 z.B. im } \infty]{\phi(1)=0} \boxed{U(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})} \quad (3.26)$$

• pot. Energie zweier Pkt. Ladungen:

$$\boxed{U = q_1 \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}} \quad (3.26a)$$

• elektrostatische Energie U von N Punktladungen im <u>eigenen</u> Feld:

(1) Energie von q_i im Feld von q_j $(j = 1 \ldots i-1)$

$$U_i(\underline{r}_i) = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j \overset{(3.13)}{=} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \quad (3.27)$$

(2) Bringe N Ladungen sukzessive an ihren Ort:

$$\longrightarrow \quad U = \sum_{i=2}^{N} U_i(\underline{r}_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \quad (3.28)$$

• kont. Ladungsverteilung: $q_i = \rho(\underline{r})\, d^3r$

$$(3.28) \longrightarrow \boxed{U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r\, d^3r' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \overset{(3.11)}{=} \frac{1}{2} \int \rho(\underline{r}) \Phi(\underline{r})\, d^3r} \quad (3.29)$$

<u>NB</u>: (1) Für beschränkte ρ ist $\underline{r} \to \underline{r}'$ wohl definiert, wegen $d^3r = r^2 dr\, d\Omega$

(2) Faktor $\frac{1}{2}$, weil $\Phi(\underline{r})$ von $\rho(\underline{r})$ selbst erzeugt

• Übergang zu $\underline{E}(\underline{r})$:

$$(3.29) \xrightarrow[\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho]{(3.21)} U = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, \Phi(\underline{r}) \nabla^2 \Phi(\underline{r}) \overset{\text{part. Integ. \& } \Phi(\infty) = 0}{=} \frac{\varepsilon_0}{2} \int \underline{\nabla}\Phi \cdot \underline{\nabla}\Phi\, d^3r$$

$$\Phi(\underline{r}) \nabla^2 \Phi(\underline{r}) = \underline{\nabla} \cdot (\Phi(\underline{r}) \nabla \Phi(\underline{r})) - \underline{\nabla}\Phi \cdot \underline{\nabla}\Phi$$

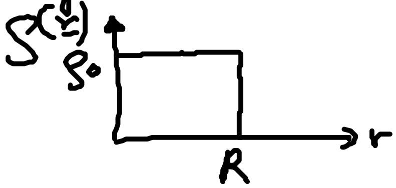
$$\longrightarrow \quad U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, |\underline{E}(\underline{r})|^2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{u(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\underline{E}(\underline{r})|^2 = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}}$$

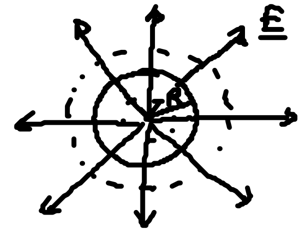
… Energiedichte der Elektrostatik

3.3.4 Homogen geladene Kugel

- Ladungsdichte:



$\xrightarrow[\text{symmetrie}]{\text{Kugel-}}$



radiale Feldlinien
$\phi =$ konstant $\hat{=}$ Kugeloberfläche

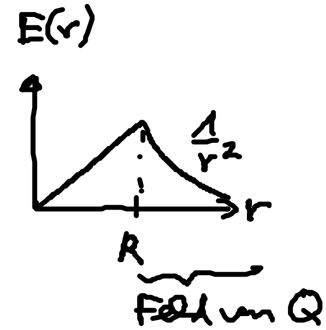
$$\longrightarrow \quad \phi(r), \quad \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi = -\phi'(r)\,\underline{e}_r = E(r)\,\underline{e}_r$$

- Berechnung von $\phi, \underline{E}$: s. Übungen

(1) Gaußsches Gesetz:

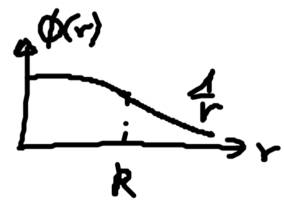
$$\oint \underbrace{\underline{E}(\underline{r})}_{\sim \underline{e}_r} \cdot \underbrace{d\underline{f}}_{\sim \underline{e}_r} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho(r')$$

$$\longrightarrow \quad E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & , r > R \end{cases} \qquad (3.31)$$



mit $Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$

$$\xrightarrow{-\phi'(r) = E(r)} \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{Q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) & , r < R \\ \frac{Q}{r} & , r > R \end{cases}$$



(2) über $\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ s. Übungen

• elektrostatische Energie (Selbstenergie):

Energiedichte: $u(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\,|\underline{E}(\underline{r})|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\begin{cases}\frac{r^2}{R^6}, & r<R\\ \frac{1}{r^4}, & r>R\end{cases}$ (3.33)

$$\longrightarrow \boxed{U = \int_0^\infty u(r)\,4\pi r^2\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{R}} \quad (3.34)$$

• klassischer Elektronenradius: $Q = e_0 = 1{,}602\times10^{-19}\,C$

$$U \overset{!}{=} \underbrace{m_e c^2}_{\text{Ruheenergie Elektron}} \approx 0{,}5\,\text{Me}\underbrace{\text{V}}_{1.6\times10^{-19}\,\underbrace{CV}_{J}} \longrightarrow \boxed{R_e = 1{,}7\cdot10^{-15}\,m}$$

NB: - Nur Abschätzung!
- Comptonwellenlänge:
$\lambda = \frac{h}{m_e c} = 2\cdot10^{-12}\,m \gg R_e$
$\to$ Quanteneffekte werden wichtig

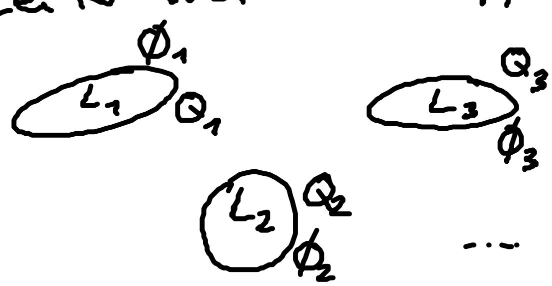
3.3.5 Externalprinzip & Kapazitäten

• in Elektrostatik:

$$\boxed{\text{Leiter} = \text{Äquipotentialflächen} \mathrel{\hat{=}} \phi = \text{konstant} \longrightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi = 0}$$

Bew: sonst würde Strom fließen

• Geg: n Leiter mit Volumen L_i, Ladung Q_i und Potential ϕ_i



Ges: $\{Q_i\} \longrightarrow \{\phi_i\}$, $\underline{E}$-Feld-Verteilung etc.

- Theorem von Thomson:

$$\boxed{\text{Die Ladungsdichten } \rho_i(\underline{r}) \text{ in Leiter } i \text{ stellen sich so ein, daß die Gesamtenergie minimal (extremal) wird.}}$$

Beweis: $U \overset{(3.23)}{=} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i,j} \int_{L_i} d^3 r_i \int_{L_j} d^3 r_j \frac{\rho_i(\underline{r}_i)\,\rho_j(\underline{r}_j)}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$ (3.36)

$\rho(\underline{r}) = \sum_i \rho_i(\underline{r}_i)$

minimiere unter Nebenbedingung: $\int_{L_i} d^3 r\, \rho_i(\underline{r}) = Q_i$

$$\frac{\delta}{\delta\rho_k}\sum_i \int \rho_i(\underline{r})\, f_i(\underline{r})\, d^3 r = f_k(\underline{r})$$

$$\frac{\delta}{\delta\rho_k(\underline{r})}\Big[U - \sum_i \underbrace{\phi_i}_{\text{Lagrangeparameter}} \int d^3 r_i\, \rho_i(\underline{r}_i)\Big] = 0$$

$\longrightarrow \phi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \int_{L_j} d^3 r_j \frac{\rho_j(\underline{r}_j)}{|\underline{r}_k - \underline{r}_j|}$, $\underline{r}_k \in L_k$

$\hat{=}$ Bestimmungsgleichung für ϕ_k , qed

$\longleftrightarrow$ ϕ_k ist Potential von L_k

- Kapazitäten:

Wegen $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \xrightarrow{\phi \text{ ist linear}} \phi_i = \sum_j p_{ij}\, Q_j$

$$\xrightarrow{\text{invertiere}} \boxed{Q_i = \sum_j C_{ij}\, \phi_j} \quad (3.27)$$

C_{ij}: Kapazitäten

Einheit: $[C_{ij}] = \frac{C}{V} = 1F$ (arad)