

Wiederholung:

Coulomb Gesetz  $\rightarrow$

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = 0 \rightarrow \underline{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Leftrightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r' \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Green'sche Fkt.:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad (**)$$

lineare Dgl  $\rightarrow$  Prinzipale Superposition:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \rightarrow \phi_1 \\ \rho_2 \rightarrow \phi_2 \end{array} \right\} \rho_1 + \rho_2 \rightarrow \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') d^3r' \xrightarrow{(**)} G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} q_0 \sum_i \frac{q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3} (\underline{r}-\underline{r}_i)$$
$$= q_0 \underline{E}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} (\underline{r}-\underline{r}') d^3r'$$

$$\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \rightarrow \phi = G(\underline{r}-\underline{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_0|}$$

### 3.3.3 elektrostatische Energie

• Erinnerung:  
verrichtete Arbeit an Ladung  $q$ :  $W = q [\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1)]$  (3.19)

• Definiere:  
potentielle Energie von  $q$  am Ort  $\underline{r}$  im Feld  $\underline{E} = -\operatorname{grad} \phi$

$\phi(\underline{r}_1) = 0$   
 $\xrightarrow{\text{Referenzpt 1}}$   
z. B. im  $\infty$

$$\boxed{U(\underline{r}) = q \phi(\underline{r})} \quad (3.26)$$

• pot. Energie zweier Pkt. Ladung:

$$U = q_1 \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_1 - r_2|} \quad (3.26a)$$

• elektrostatische Energie  $U$  von  $N$  Punktladungen im eigenen Feld:

(1) Energie von  $q_i$  im Feld von  $q_j$  ( $j=1 \dots i-1$ )

$$U_i(r_i) = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \phi_j \stackrel{(3.1)}{=} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|r_i - r_j|} \quad (3.27)$$

(2) Bringe  $N$  Ladungen sukzessive an ihren Ort:

$$\rightarrow U = \sum_{i=2}^N U_i(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|} \quad (3.28)$$

• kont. Ladungsverteilung:  $q_i = \rho(r) d^3r$

$$(3.28) \rightarrow U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r d^3r' \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{1}{2} \int \rho(r) \phi(r) d^3r \quad (3.29)$$

NB. (1) für beschränkte  $\rho$  ist  $r \rightarrow r'$  wohl definiert,  
weil  $d^3r = r^2 dr d\Omega$

(2) Faktor  $\frac{1}{2}$ , weil  $\phi(r)$  von  $\rho(r)$  selbst erzeugt

• Übergang zu  $\underline{E}(r)$ :

$$(3.29) \xrightarrow[\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho]{(3.21)}$$

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \phi(r) \nabla^2 \phi(r) \stackrel{\text{part. Integ. } \& \phi(\infty) = 0}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \phi \cdot \nabla \phi d^3r$$

$$= \nabla \cdot (\phi(r) \nabla \phi(r)) - \nabla \phi \cdot \nabla \phi$$

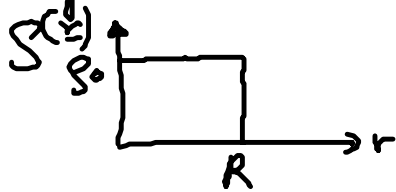
$$\rightarrow U = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r |\underline{E}(r)|^2$$

$$\rightarrow u(r) = \frac{\epsilon_0}{2} |\underline{E}(r)|^2 = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}$$

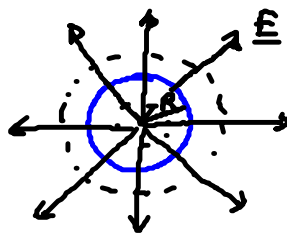
... Energiedichte der Elektrostatik

### 3.3.4 Homogen geladene Kugel

• Ladungsdichte:



Kugel-  
symmetrie



radiale Feldlinien

$\Phi = \text{konstant} \hat{=} \text{Kugeloberfläche}$

$$\rightarrow \Phi(r), \vec{E} = -\nabla\Phi = -\Phi'(r)\vec{e}_r = E(r)\vec{e}_r$$

• Berechnung von  $\Phi, \vec{E}$ : s. Übung

(1) Gaußsches Gesetz:

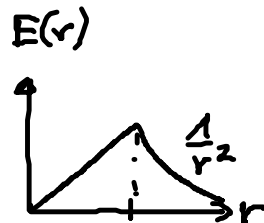
$$\int_{\vec{e}_r} \underbrace{\vec{E}(r)}_{\sim \vec{e}_r} \cdot \underbrace{d\vec{E}}_{\sim \vec{e}_r} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho(r')$$

$$\rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R \end{cases} \quad (3.31)$$

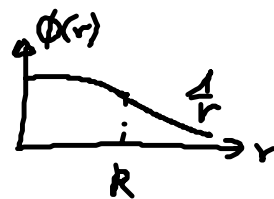
$$\text{mit } Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$$

$$-\Phi'(r) = E(r)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{Q}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & , r < R \\ \frac{Q}{r} & , r > R \end{cases}$$



$R$   
Feld von  $Q$



(2) über  $\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$  s. Übung

• elektrostatische Energie (Selbstenergie):

Energie dichte:  $u(r) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(r)|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^2}{R^6}, & r < R \\ \frac{1}{r^4}, & r > R \end{cases} \quad (3.33)$

→  $U = \int_0^\infty u(r) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R} \quad (3.34)$

• klassischer Elektronradius:  $Q = e_0 = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

$U \stackrel{!}{=} \underbrace{m_e c^2}_{\substack{\text{Ruheenergie} \\ \text{Elektron}}} \approx 0,5 \text{ MeV} \quad \underbrace{1,6 \times 10^{-19} \text{ C V}}_{\substack{\text{eV}}} \rightarrow R_e = 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

NB: - Nur Ableitung 0  
 - Comptonwellenlänge:  
 $\lambda = \frac{h}{m_e c} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m} \gg R_e$   
 → Quanteneffekte werden wichtig

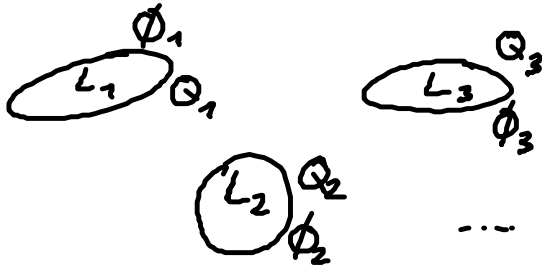
### 3.3.5 Externalprinzip & Kapazitäten

• in Elektrostatik:

Leiter = Äquipotentialflächen  $\hat{=} \phi = \text{konstant} \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$

Bew: sonst würde Strom fließen

• Geg: n Leiter mit Volumen  $L_i$ , Ladung  $Q_i$  und Potential  $\phi_i$ :



Ges:  $\{Q_i\} \rightarrow \{\phi_i\}$ ,  $\mathbf{E}$ -Feld-Verteilung etc.

• Theorem von Thomson:

Die Ladungsdichten  $\rho_i(\underline{r})$  in Leiter  $i$  stellen sich so ein, daß die Gesamtenergie minimal (extremal) wird.

Beweis:  $U \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j} \int_{L_i} d^3r_i \int_{L_j} d^3r_j \frac{\rho_i(\underline{r}_i) \rho_j(\underline{r}_j)}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \quad (3.36)$

$\rho(\underline{r}) = \sum_i \rho_i(\underline{r}_i)$

minimiere unter Nebenbedingung:  $\int_{L_i} d^3r \rho_i(\underline{r}) = Q_i$

$\frac{\delta}{\delta \rho_k(\underline{r})} [U - \sum_i \phi_i \int_{L_i} d^3r_i \rho_i(\underline{r}_i)] = 0$   
↑ Lagrangeparameter

$\frac{\delta}{\delta \rho_k} \int \rho_i(\underline{r}) f_i(\underline{r}) d^3r = f_k(\underline{r})$

$\rightarrow \phi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \int_{L_j} d^3r_j \frac{\rho_j(\underline{r}_j)}{|\underline{r}_k - \underline{r}_j|}, \quad \underline{r}_k \in L_k$

$\stackrel{!}{=} \text{Bestimmungsgleichung } \phi = \phi_k, \text{ gel.}$

$\leftrightarrow \phi_k \text{ ist Potential von } L_k$

• Kapazitäten:

Wegen  $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$   $\xrightarrow{\phi \text{ ist linear}}$   $\phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$

invertiere  $\rightarrow$   $Q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j$  (3.27)

↑ Kapazitäten

Einheit:  $[C_{ij}] = \frac{C}{V} = 1F(\text{cond})$