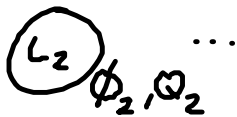


3.2.5 Extremalprinzip & Kapazitäten

• Geometrie



• Theorem von Thomson



• Kapazitäten:

$$\boxed{Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j} \quad (3.37)$$

Kapazitäten

(1) elektrostatische Energie:

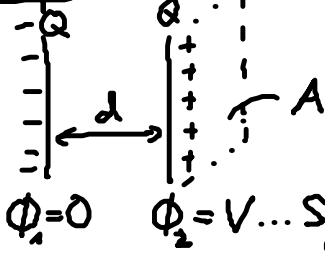
$$U = \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} d^3r_i \rho_i(r_i) \Phi_i$$

$Q_i = \sum_j C_{ij} \Phi_j$

$$\rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_i C_{ij} \Phi_j} \quad (3.38)$$

NB: Symmetrie: $C_{ij} = C_{ji}$

(2) Bsp: Plattenkondensator



$$(3.37) \quad Q = C_{22} V = -C_{12} V$$

$$\rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

$$\xrightarrow{(3.38)} \boxed{U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V} \quad (3.39)$$

(3) Kapazitäten: s. Übungen

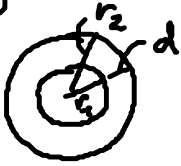
Plattenkondensator: $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (3.40)$ ($\epsilon_r \dots$ relative Dielektrizitätskonstante ϵ später)

Zylinder " : $C = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{L}{\ln(1 + \frac{d}{r_1})} \quad (3.41)$



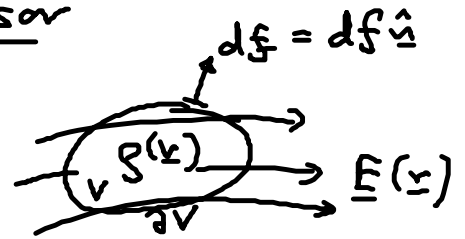
$$r_2$$

Kugelkondensator: $C = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)^{-1} = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{r_1 r_2}{d} \quad (3.42)$



3.3.6 Maxwellscher Spannungstensor

- Kraft auf Volumen V mit Ladungsdicht $\rho(\underline{x})$ im Feld $\underline{E}(\underline{x})$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Kraft dichte: } \underline{b}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \underline{E}(\underline{x}) \\ \text{Gesamtkraft: } \underline{F}(\underline{x}) = \int d^3r \rho(\underline{x}) \underline{E}(\underline{x}) \end{array} \right\} (3.43)$$

- kein äußeres Feld: $\rho(\underline{x}) \rightarrow \underline{E}(\underline{x})$ s. (3.10)

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r \rho(\underline{x}) \int_V \rho(\underline{x}') \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3r'$$

Antisymmetrie des Integ. in $\underline{x} \leftrightarrow \underline{x}' \rightarrow \underline{F} = -\underline{F} \Rightarrow \underline{F} = 0$ (actio = reactio)

- mit äußeren Feld: Bsp: durch benachbarte Körper

$$\begin{aligned} b_i &= \rho E_i \stackrel{\text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}{\sim} \epsilon_0 E_i \nabla_j E_j = \epsilon_0 [\nabla_j (E_i E_j) - \underbrace{E_j \nabla_j E_i}_{-\nabla_i \phi}] \\ &= \epsilon_0 [\nabla_j (E_i E_j) - E_j \nabla_i E_j] = \epsilon_0 \nabla_j (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k E_k) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{b_i = \nabla_j T_{ij}(\underline{r}) \quad (\text{„Divergenz von } T_{ij}\text{“})} \quad (3.44)$$

$$\text{mit } T_{ij}(\underline{r}) = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k E_k \right)$$

... Maxwell'scher Spannungstensor (Elektrostatik)

$$\text{mit Spur: } \text{Sp } \underline{T} = T_{ii} = \epsilon_0 \left(E^2 - \frac{3}{2} E^2 \right)$$

$$\boxed{\text{Sp } \underline{T} = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \stackrel{(3.20)}{=} -u(\underline{r})} \quad (3.45)$$

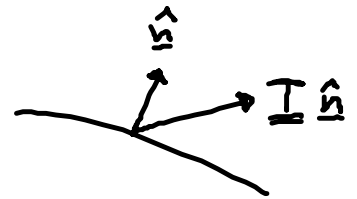
... Energiedichte

• Bedeutung

$$\text{Kraft auf } V: F_i = \int_V d^3r \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{b_i} \stackrel{\text{Grob}}{=} \int_{\partial V} T_{ij} \frac{df_j}{df \hat{n}_j}$$

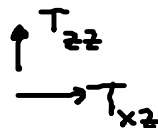
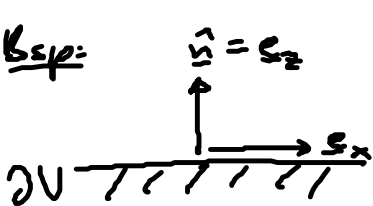
$$\rightarrow \boxed{F_i = \int_{\partial V} T_{ij} \hat{n}_j df}$$

Dichte einer Oberfläche Kraft



„ \underline{F} durch Integration über Oberfläche“

• Bsp:



T_{zz} ... Zugsprung (\perp zu ∂V)

T_{xz} ... Schersprung (\parallel zu ∂V)

• allgemein: Zugsprung: $\hat{n}_i T_{ij} \hat{n}_j \parallel$ zu \hat{n}

Schersprung: $(\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j) T_{jk} \hat{n}_k \perp$ zu \hat{n}
 „Richtig $\perp \hat{n}$ “

• Anwenden: später

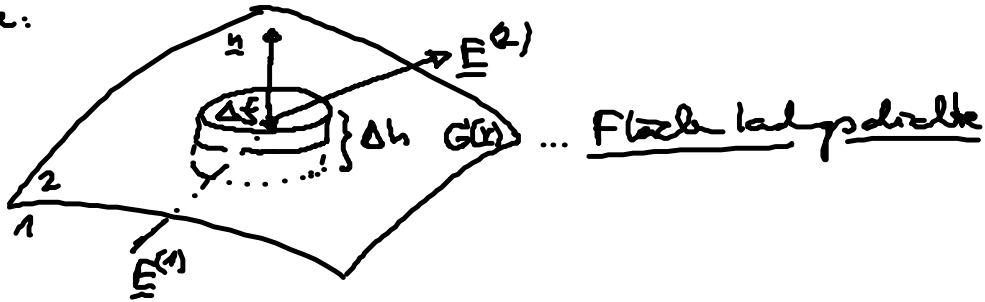
3.4 Randbedingungen von \underline{E} an Grenzfläche

• \underline{E} -Feld bestimmt durch ρ & Randbedingungen

3.4.1 Allgemeine Formulierung

- Sprung in Normalkomponente von \underline{E} :

Geometrie:



Gauß für „Dose“: $\int \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta f$

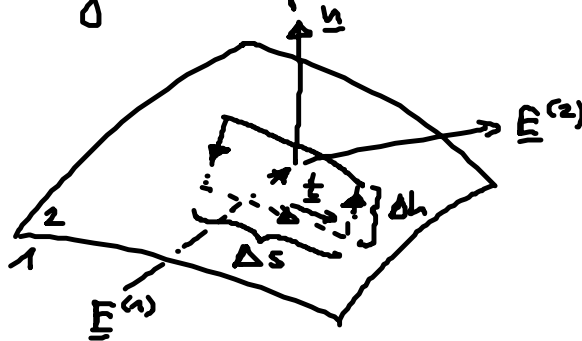
kleine $\Delta f^{(1)} \cdot \underline{E}^{(1)} + \Delta f^{(2)} \cdot \underline{E}^{(2)} + O(\Delta h) \stackrel{\Delta h \rightarrow 0}{=} \Delta f n \cdot (\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)})$

$-\Delta f n$ $\Delta f n$

$$\rightarrow \boxed{n \cdot (\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)}) = E_{\perp}^{(2)} - E_{\perp}^{(1)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (3.47)$$

- Stetigkeit der Tangentialkomponente von \underline{E} :

Geometrie:



Stokes für Schleife: $\text{rot } \underline{E} = 0 \rightarrow 0 = \oint \underline{E} \cdot d\underline{s} = (\underline{E}^{(1)} \cdot \underline{t} - \underline{E}^{(2)} \cdot \underline{t}) \Delta s + \underbrace{O(\Delta h)}_{\rightarrow 0}$

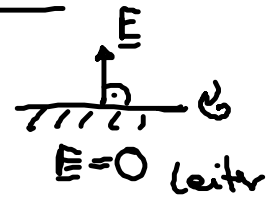
$$\rightarrow \boxed{\underline{t} \cdot (\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)}) = 0 \iff E_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel}^{(2)}} \quad (3.48)$$

- Verallgemeinerung auf Dielektrika: in (3.47): $\underline{E} \rightarrow \underline{D}$ (später)

3.4.2 Elektrische Eigenschaft von Leitern (Statik)

• $\underline{E} = 0$ im Leiter $\leftrightarrow \Phi = \text{konst}$ (3.49)

somit würde Strom fließen



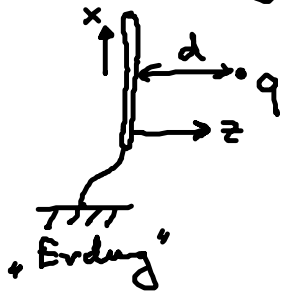
-
- (1) Dichte $\rho = 0$ im Leiter, wegen $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \underline{E}$
 - (2) Tangentialkomponente:
 $\underline{E}_{||} = 0$ an Leiteroberfläche
 - (3) Normalkomp.:
 $\underline{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (3.50), wegen (3.47) & $E_{\perp}^{(1)} = 0$

3.4.3 Methode der Bildladungen

• Intuitive Methode:

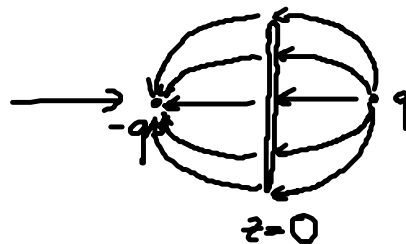
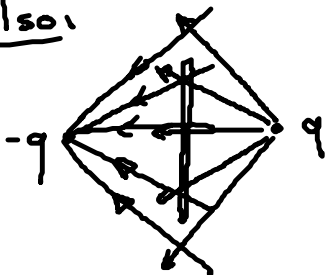
Führe Bildladungen ein, um Randbed. zu erfüllen

• Bsp: Punktladung vor leitender Platte

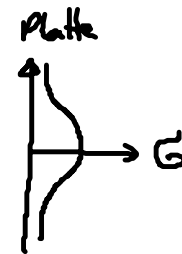


- (1) q zieht $-q$ in die Platte $\rightarrow \sigma$
- (2) $\underline{E} \perp$ Platte

also:



mit



(1) elektr. Feld:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\underline{r} - d\mathbf{e}_z}{|\underline{r} - d\mathbf{e}_z|^3} - \frac{\underline{r} + d\mathbf{e}_z}{|\underline{r} + d\mathbf{e}_z|^3} \right) \quad (3.51)$$

(2) Oberflächenladung auf Platte: $\underline{r} = (x, y, 0)$

$$\underline{E}(x, y, 0) = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \underline{e}_z \perp \text{Platte!} \quad (3.52)$$

→ (i) Oberflächenladungsdichte:

$$G(\underline{r}) \stackrel{(3.50)}{=} \epsilon_0 E_{\perp} = -\frac{q}{2\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} < 0 \quad (3.53)$$

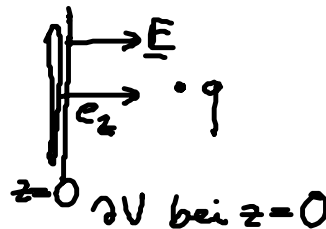
→ (ii) gesamte induzierte Ladung:

$$\int_{\text{Plattenfläch}} G(\underline{r}) d^2r = -q d \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = +q d \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty}$$

$$\rightarrow \int G(\underline{r}) d^2r = -q! \text{ qed} \quad (3.54)$$

(3) Kraft auf Platte:

mit Maxwell'scher Spannungstensor:



$$F_i = \int_{\partial V} T_{ij} n_j d\mathcal{f}$$

$$\rightarrow F_x = F_y = 0$$

$$F_z = \int_{\partial V} T_{zz} d\mathcal{f} \stackrel{\text{Plattenfläch}}{=} 2\pi \int_0^{\infty} \rho d\rho T_{zz}$$

$$T_{zz} \stackrel{(3.44)}{=} \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} E_z^2 \stackrel{(3.52)}{=} \frac{q^2 d^2}{4\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^3}$$

$$\rightarrow F_z = \frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)^3} = \frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{(\rho^2 + d^2)^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{4}$$

$$\rightarrow F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} = \text{Kraft zwischen Ladung und Spiegelladung!} \quad (3.55)$$

• Ladung vor Metallkugel: s. Übungen