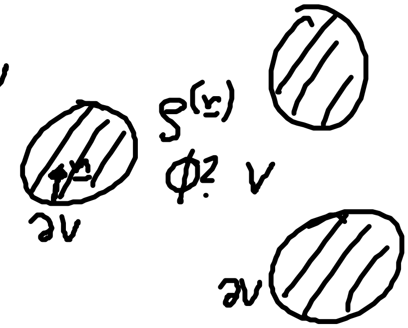
3.5 Randwertprobleme der Elektrostatik

- Grundproblem:
  Löse Poissongl. (3.21): $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho$ in V
  unter der Randbed. auf ∂V
  $\longrightarrow \underline{E} = -\text{grad}\,\phi$ mit $\text{rot}\,\underline{E} = 0$!



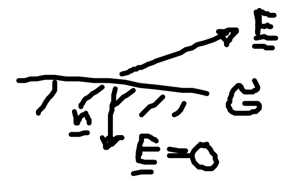
einfach zusammenhängendes Gebiet! (hier in 3D)

3.5.1 Eindeutigkeit der Lösung

- Randbedingungen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (1)\ \text{Dirichlet:} & \phi\big|_{\partial V} \text{ vorgeben} & \\ (2)\ \text{Neumann:} & \underline{n}\cdot\underline{\nabla}\phi\big|_{\partial V} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial V} & \text{(Normalenableitung)} \\ (3)\ \text{Cauchy:} & a(1) + b(2) \text{ vorgeben} & \end{array}}$$

- Bsp: zu (1) auf Leiter: $\phi\big|_{\partial V} = \text{konstant}$
  zu (2) bei Oberflächenladung:
  (3.47) $\longrightarrow -\underline{n}\cdot\underline{E} = +\underline{n}\cdot\underline{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\underline{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



- Satz:

$$\boxed{\text{Für Dirichlet- oder Neumann Randbedingungen ist die Lösung der Poissongl. eindeutig.}} \quad (3.57)$$

Beweis: Seien ϕ_1 und ϕ_2 unterschiedliche Lösungen
$\longrightarrow \phi_d = \phi_1 - \phi_2$ erfüllt $\nabla^2 \phi_d = 0$ mit $\begin{cases} \phi_d\big|_{\partial V} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial V} = 0 \end{cases}$ (*)

1. Greensche Identität (2.28): $\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi) dV = \int_{\partial V} \varphi \nabla \psi \cdot d\underline{f}$

mit $\varphi = \psi = \phi_d \xrightarrow[(*)]{} \int_V \underbrace{(\nabla \phi_d)^2}_{\geq 0} dV = 0$

$\longrightarrow \nabla \phi_d = 0 \longrightarrow \phi_d =$ konstant $= 0$ o.B.d.A. qed

3.5.2 Methode der Greenschen Funktion

- Motivation: Poissongl. in unterschiedl. Bereichen anwendbar

$\longrightarrow$ werde etwas formaler

- Betrachte:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Poisson-Gl. für Einheitsladung bei } \underline{r}': \\ &\qquad \nabla^2 G(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}') \\ &\text{Greensche Fkt.} \quad G(\underline{r},\underline{r}') = G_0(\underline{r},\underline{r}') + F(\underline{r},\underline{r}') \\ &\qquad\qquad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \underbrace{F(\underline{r},\underline{r}')}_{\text{mit } \nabla^2 F = 0} \end{aligned}} \qquad (3.58)$$

Bem: (i) G_0 ... Greensche Fkt. ohne Ränder ($V \to \infty$)

(ii) $G = G_0 + F$ ... Greensche Fkt.!!!

(iii) Verwende $F(\underline{r},\underline{r}')$ um Randbed. von G zu erfüllen

Bsp: $F(\underline{r},\underline{r}')$ ... Potential von induzierter oder Spiegelladung $\notin V$

- Bestimmung von $\phi(\underline{r})$ über G & Randbedingungen:

2. Greensche Ident. (2.29): $\int (\psi \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \psi) dV' = \int_{\partial V} (\psi \nabla' \phi - \phi \nabla' \psi) \cdot d\underline{f}'$

mit $\nabla'^2 \phi(\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}')$

$\psi(\underline{r}') = G(\underline{r},\underline{r}')$ & $\nabla'^2 G = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

(3.59)

$$\longrightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r},\underline{r}')\rho(\underline{r}')dV' + \varepsilon_0 \int_{\partial V} [G(\underline{r},\underline{r}')\underline{\nabla}'\phi - \phi(\underline{r}')\underline{\nabla}'G(\underline{r},\underline{r}')]\cdot d\underline{f}'$$

<u>NB</u>: $\phi(\underline{r})$ durch $\phi|_{\partial V}$ & $\underline{n}\cdot\underline{\nabla}\phi|_{\partial V}$ überbestimmt!

(1) Dirichlet-Randbedingungen: $\phi|_{\partial V}$ vorgeben

$\longrightarrow$ Setze:
$$\boxed{G(\underline{r},\underline{r}') = G_D(\underline{r},\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'\in\partial V} = 0} \quad (3.60)$$

... homogene Randbed.

$$\longrightarrow \boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V G_D(\underline{r},\underline{r}')\rho(\underline{r}')\,dV - \varepsilon_0 \int_{\partial V} \phi(\underline{r}')\underline{\nabla}'G_D(\underline{r},\underline{r}')\cdot d\underline{f}'} \quad (3.61)$$

(2) Neumann-Randbed.: $\underline{n}\cdot\underline{\nabla}\phi|_{\partial V}$ vorgeben

Versuch: in (3.59) $\underline{\nabla} G_N = 0$

aber $\displaystyle\int_V d^3r'\, \nabla'^2 G_N(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r'\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}$

Gauß $\displaystyle\int_{\partial V} \underline{\nabla}'G_N(\underline{r},\underline{r}')\cdot d\underline{f}' = -\frac{1}{\varepsilon_0}$ (*) $\longrightarrow$ $\underline{\nabla} G_N = 0$ ↯

$\longrightarrow$ Wähle:
$$\boxed{\underline{n}\cdot\underline{\nabla}'G_N(\underline{r},\underline{r}')\Big|_{r'=\partial V} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{\partial V}} \quad (3.62)$$

Fläche der Oberfläche

$$\xrightarrow{(3.59)} \boxed{\phi(\underline{r}) = \int_V G_N(\underline{r},\underline{r}')\rho(\underline{r}')dV' + \varepsilon_0\int G_N(\underline{r},\underline{r}')\underline{\nabla}'\phi(\underline{r}')\cdot d\underline{f}' + \langle\phi\rangle_{\partial V}} \quad (3.63)$$

mit $\displaystyle\langle\phi\rangle_{\partial V} = \frac{1}{\partial V}\int_{\partial V}\phi(\underline{r}')\,d\underline{f}'$

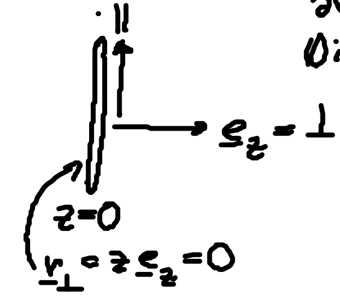
Mittel von ϕ über alle Randflächen!

$\langle\phi\rangle_{\partial V} \to 0,\ \partial V \to \infty$

• **Bsp.:** Greensche Fkt. für geerdete Metall-Platte bei $z=0$: $\longrightarrow \Phi\big|_{\partial V} = $ konst, Dirichlet

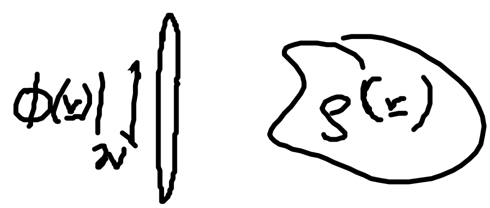
mit $\underline{r}' = \underline{r}_{\parallel}' + \underline{r}_{\perp}'$

Randbedingung: $G(\underline{r},\underline{r}')\Big|_{\underline{r}'=\underline{r}_{\parallel}'} = 0$



$$\longrightarrow \quad G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\underbrace{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{Punktladung bei } \underline{r}' \text{ mit } z'>0} - \underbrace{\frac{1}{|\underline{r}-(\underline{r}_{\parallel}'-\underline{r}_{\perp}')|}}_{\text{Spiegelladung bei } z'<0}\Big) \qquad (3.64)$$

$\xrightarrow{(3.61)}$ $\Phi(\underline{r})$ für beliebiges $\rho(\underline{r})$ in $z>0$ (vor Metallplatte) berechenbar!



3.5.3 Aussagen zur Potentialtheorie

• Laplace-Gleichung:
$\rho(\underline{r}) = 0 \longrightarrow$ $\boxed{\nabla^2\Phi = 0}$ (3.65)

Lösung: „harmonische Funktionen"

• 1D: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi = 0 \longrightarrow \Phi = a + bx$

$\longrightarrow$ Prinzip von Maximum & Minimum

$\boxed{\Phi \text{ hat } \underline{\text{kein}} \text{ Maximum/Minimum im Innern von } V}$ (3.66)

<u>NB:</u> nur Sattelpkte sind möglich

• <u>Beweis</u>:
(1) Mittelwertsatz der Potentialtheorie
2. Greensche Identität (2.29)

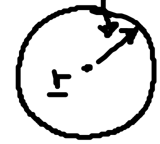
$$\int_V \left(\psi\,\underline{\nabla}'^2\Phi - \Phi\,\underline{\nabla}'^2\psi\right)dV' = \int_{\partial V'}\left(\psi\,\underline{\nabla}'\Phi - \Phi\,\underline{\nabla}'\psi\right)\cdot d\underline{f}'$$

mit $\underline{\nabla}'^2\phi(\underline{r}') = 0$, $\underline{r}' \in V$

$\psi = G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{|\underline{R}|} = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ mit $\underline{\nabla}^2 \frac{1}{|\underline{R}|} = -4\pi\,\delta(\underline{R})$

$$\longrightarrow \quad 4\pi\,\phi(\underline{r}) = \int_{\partial V'} \left(G\,\underline{\nabla}'\phi - \phi\,\underline{\nabla}'G\right)\cdot d\underline{f}'$$

mit $V = K_R$ ... Kugel um $\underline{r}$ mit Radius $R = |\underline{r}-\underline{r}'|$, $\underline{R} = \underline{r}' - \underline{r}$

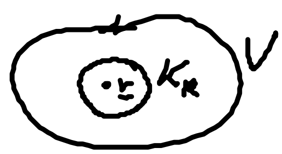


$$\longrightarrow \quad \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial K_R} \left[\frac{1}{R}\underline{\nabla}'\phi\right.}_{\overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{R}\int_{K_R} \underline{\nabla}'^2\phi\, dV = 0} \left. + \frac{\underline{R}}{R^3}\,\phi(\underline{r}')\right]\cdot \underbrace{d\underline{f}'}_{R^2 d\Omega' \frac{\underline{R}}{R}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial K_R} \phi(\underline{r}')\, d\Omega'} \quad (3.67)$$

$\phi(\underline{r})$ ... arithmetische Mittel vom Kugelrand!

(2) Beliebiges V:



Annahme: lokales Minimum/Maximum von $\phi(\underline{r})$ in $\underline{V}$ verletzt (3.67) für K_R in V, da $\phi(\underline{r}') \underset{<}{\overset{>}{\text{oder}}} \phi(\underline{r})$ für $\underline{r}' \in \partial K_R$ wäre $\longrightarrow$ Annahme falsch qed.

- **Faraday-Käfig:**

$\nabla^2\phi = 0$ & $\phi|_{\partial V} = \text{konstant} \overset{!}{=} \phi|_V$, da kein Maximum/Minimum in V vorliegen kann

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{E} = 0}$$

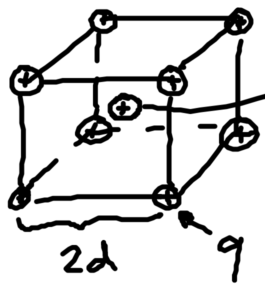
• Earnshaw's Theorem:

$$\boxed{\text{Kein geladener Körper kann einzig durch elektrostatische Kräfte im stabilen GG gehalten werden.}} \quad (3.68)$$

Bew: Um Körper: $\nabla^2 \phi = 0$ ohne Minimum von ϕ [s.(3.66)]!

$\longrightarrow$ potentielle Energie $q\phi$ " " ! qed.

Bsp:



Q bei $\underline{r} = 0$ ... keine stabile Lage!

q bei $\underline{r}_n = d(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$