

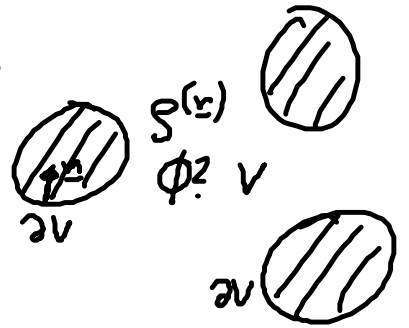
3.5 Randwertprobleme der Elektrostatik

• Grundproblem:

Löse Poissangl. (3.21): $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho$ in V

unter der Randbed. auf ∂V

$\rightarrow \underline{E} = -\text{grad } \phi$ mit $\text{rot } \underline{E} = 0!$



einfach zusammenhängendes Gebiet! (hier in 3D)

3.5.1 Eindeutigkeit der Lösung

• Randbedingungen:

(1) Dirichlet: $\phi|_{\partial V}$ vorgeben

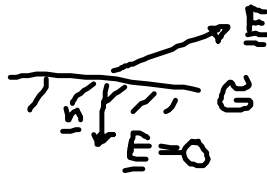
(2) Neumann: $\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \phi|_{\partial V} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}}|_{\partial V}$ (Normalenableitung)

(3) Cauchy: a(1) + b(2) vorgeben

• Bsp: zu (1) auf Leiter: $\phi|_{\partial V} = \text{konstant}$

zu (2) bei Oberflächenladung:

(3.47) $\rightarrow -\underline{n} \cdot \underline{E} = +\underline{n} \cdot \underline{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



• Satz:

Für Dirichlet- oder Neumann Randbedingungen ist die Lösung der Poissangl. eindeutig. (3.57)

Beweis: Seien ϕ_1 und ϕ_2 unterschiedliche Lösungen

$\rightarrow \phi_d = \phi_1 - \phi_2$ erfüllt $\nabla^2 \phi_d = 0$ mit $\begin{cases} \phi_d|_{\partial V} = 0 \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial \underline{n}}|_{\partial V} = 0 \end{cases} (*)$

1. Greensche Identität (2.28): $\int_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \int_{\partial V} \psi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{f}$

mit $\psi = \varphi = \phi_d \xrightarrow{(*)} \int_V \underbrace{(\nabla \phi_d)^2}_{\geq 0} dV = 0$

$\rightarrow \nabla \phi_d = 0 \rightarrow \phi_d = \text{konstant} = 0$ o.B.d.A. gel

3.5.2 Methode der Green'schen Funktion

• Motivation: Poissongl. in unterschiedl. Bereich anwendbar

\rightarrow werde etwas formaler

• Betrachte:

Poisson-Gl. für Einheitsladung bei r' :

$$\nabla^2 G(r, r') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r - r')$$

Greensche Fkt. $G(r, r') = G_0(r, r') + F(r, r')$ (3.58)

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|r - r'|} + F(r, r')$$

mit $\nabla^2 F = 0$

Bem: (i) G_0 ... Greensche Fkt. ohne Ränder ($V \rightarrow \infty$)

(ii) $G = G_0 + F$... Greensche Fkt.!!!

(iii) Verwende $F(r, r')$ um Randbed. von G zu erfüllen

Bsp: $F(r, r')$... Potential von induzierter oder Spiegelladung $\notin V$

• Bestimmung von $\phi(r)$ über G & Randbedingungen:

2. Greensche Ident. (2.28), $\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_{\partial V} (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{f}'$

mit $\nabla'^2 \phi(r') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r')$

$\psi(r') = G(r, r')$ & $\nabla'^2 G = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r - r')$

(3.53)

$$\rightarrow \phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r}, \underline{r}') g(\underline{r}') dV' + \epsilon_0 \int_{\partial V} [G(\underline{r}, \underline{r}') \nabla' \phi - \phi(\underline{r}') \nabla' G(\underline{r}, \underline{r}')] \cdot d\underline{f}'$$

NB: $\phi(\underline{r})$ durch $\phi|_{\partial V}$ & $\underline{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial V}$ überbestimmt!

(1) Dirichlet-Randbedingung: $\phi|_{\partial V}$ vorgeben

$$\rightarrow \text{Sehe: } G(\underline{r}, \underline{r}') = G_D(\underline{r}, \underline{r}') \Big|_{\underline{r}' \in \partial V} = 0 \quad (3.60)$$

... homogene Randbed.

$$\rightarrow \phi(\underline{r}) = \int_V G_D(\underline{r}, \underline{r}') g(\underline{r}') dV - \epsilon_0 \int_{\partial V} \phi(\underline{r}') \nabla' G_D(\underline{r}, \underline{r}') \cdot d\underline{f}' \quad (3.61)$$

(2) Neumann-Randbed.: $\underline{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial V}$ vorgeben

Versuch: in (3.59) $\nabla G_N = 0$

$$\text{aber } \int_V d^3r' \nabla'^2 G_N(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r' \delta(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{\int_{\partial V}} \nabla' G_N(\underline{r}, \underline{r}') \cdot d\underline{f}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \quad (*) \rightarrow \nabla G_N \neq 0$$

$$\rightarrow \text{Wähle: } \underline{n} \cdot \nabla' G_N(\underline{r}, \underline{r}') \Big|_{\underline{r}' \in \partial V} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\partial V} \quad (3.62)$$

Fläche der Oberfläche

$$\stackrel{(3.59)}{\rightarrow} \phi(\underline{r}) = \int_V G_N(\underline{r}, \underline{r}') g(\underline{r}') dV' + \epsilon_0 \int_{\partial V} G_N(\underline{r}, \underline{r}') \nabla' \phi(\underline{r}') \cdot d\underline{f}' + \langle \phi \rangle_{\partial V} \quad (3.63)$$

$$\text{mit } \langle \phi \rangle_{\partial V} = \frac{1}{\partial V} \int_{\partial V} \phi(\underline{r}') d\underline{f}'$$

Mittelwert von ϕ über alle Randflächen!

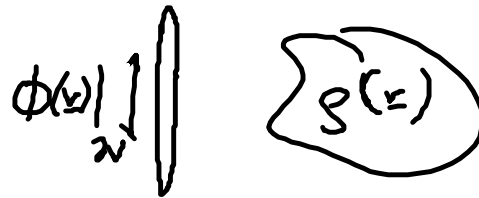
$$\langle \phi \rangle_{\partial V} \rightarrow 0, \quad \partial V \rightarrow \infty$$

- Bsp: Grensde Flt. $f =$ geerdete Metall-Platte bei $z=0$: $\rightarrow \Phi|_{\partial V} = \text{const}$, Dirichlet
 mit $r' = r'' + r'_\perp$
 Radbedingung: $G(r, r')|_{r'=r''} = 0$

$$\rightarrow G(r, r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|r-r'|} - \frac{1}{|r-(r''-r'_\perp)|} \right) \quad (3.64)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
Punktlady
bei r' mit $z' > 0$
 $\underbrace{\hspace{10em}}$
Spiegellady
bei $z' < 0$

(3.61) $\rightarrow \Phi(r)$ für beliebiges $g(r)$ in $z > 0$ (vor Metallplatte) berechenbar!



3.5.3 Aussagen zur Potentialtheorie

- Laplace-Gleichung:
 $g(r) = 0 \rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad (3.65)$
 Lösung: „harmonische Funktionen“

• 1D: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi = 0 \rightarrow \phi = a + bx$

\rightarrow Prinzip von Maximum & Minimum

ϕ hat kein Maximum/Minimum im Inneren von V (3.66)

NB: nur Sattelpunkte sind möglich

• Beweis:

(1) Mittelwertsatz der Potentialtheorie

2. Grensde Identität (2.29)

$$\int_V (\gamma \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \gamma) dV' = \int_{\partial V'} (\gamma \nabla' \phi - \phi \nabla' \gamma) \cdot d\mathbf{f}'$$

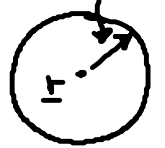
mit $\nabla'^2 \phi(r') = 0, r' \in V$
 $\mathcal{U} = G(r-r') = \frac{1}{|R|} = \frac{1}{|r-r'|}$ mit $\nabla'^2 \frac{1}{|R|} = -4\pi \delta(R)$

$\rightarrow 4\pi \phi(r) = \int (G \nabla' \phi - \phi \nabla' G) \cdot d\mathbf{f}'$

mit $V = K_R \dots$ Kugel um r mit Radius $R = |r-r'|$ $\underline{R} = r'-r$

$\rightarrow \phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{1}{R} \nabla' \phi + \frac{R}{R^3} \phi(r') \right] \cdot \underbrace{d\mathbf{f}'}_{R^2 d\Omega' \frac{R}{R}}$

$\stackrel{G \nabla'^2 \phi = 0}{=} \frac{1}{R} \int_{K_R} \nabla'^2 \phi dV' = 0$



$\rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \phi(r') d\Omega'} \quad (3.67)$

$\phi(r) \dots$ arithmetische Mittel von Kugelrand!

(2) beliebiges V :



Annahme: lokales Min-/Maximum von $\phi(r)$ in V
 verletzt (3.67) für K_R in V , da $\phi(r') \stackrel{>}{\neq} \phi(r)$ für
 $r' \in \partial K_R$ wäre \rightarrow Annahme falsch ged.

Faraday-Käfig:



(adsp. freier Hohlraum) $\nabla^2 \phi = 0$ & $\phi|_{\partial V} = \text{konstant} = \phi|_V$, da kein Maximum/
 Minimum in V vorliegen kann

$\rightarrow \boxed{E=0}$

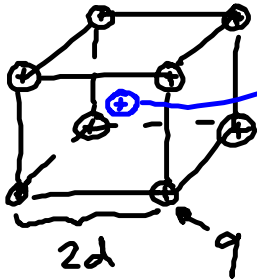
• Earnshaw's Theorem:

Kein geladener Körper kann einzig durch elektrostatische Kräfte im stabilen GG gehalten werden. (3.68)

Bew: Um Körper: $\nabla^2 \phi = 0$ ohne Minimum von ϕ [s.(3.66)]!

→ potentielle Energie $q\phi$ " " ! ged.

Bsp:



Q bei $r=0$... keine stabile Lage!

q bei $r_n = d (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$