

3.5.4 Lösungen zur Laplace-Gleichg. Kugelkoordinaten

• Motivation: $\nabla^2 \phi = 0$... zentrale Gl. der mathem. Physik, gilt im ladungs freien Raum & anderen Disziplinen

• Lösungsmethode: Entwickle ϕ nach VONS!

• charakterische Koordi.: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi(r) = 0$

Basisfkt.: ebene Wellen $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ & Radbel.

bzw.: $\sin k_x = \sin k_y \cdot \sin k_z$ etc

• Kugelkoordinaten:

→ kugelsymmetrische Probleme, z.B. über Käder

(1) Laplace Operator: $\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\omega^2$ (3.69)

(3.70) $\left\{ \begin{array}{l} \text{mit Radialanteil: } \nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \\ \text{Winkelanteil: } \nabla_\omega^2 = -\frac{1}{h^2} \hat{L}^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \end{array} \right.$

↑
Orbitalsoperator der QM

(2) Produktsatz:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y(\vartheta, \varphi) \text{ in } \nabla^2 \phi = 0$$

$$\rightarrow Y \nabla_r^2 R + \frac{R}{r^2} \nabla_\omega^2 Y = 0 \quad | \frac{r^2}{RY}$$

$$\rightarrow \frac{r^2}{R} \nabla_r^2 R = - \frac{1}{Y} \nabla_\omega^2 Y = \underbrace{L(L+1)}_{\text{Konstante } \geq 0, \text{ da } \nabla_r^2, -\nabla_\omega^2 \text{ positiv, semi definite Operatoren}} \quad \text{o.B.d.A.} \quad (3.69a)$$

(3) Radialanteil: $R = \frac{u}{r}$ in (3.69a)

$$\rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} u = 0 \rightarrow R = \alpha r^L + \beta r^{-(L+1)} \quad (3.71)$$

(4) Winkelanteil.

$$\boxed{-\nabla_{\omega}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}} \quad (3.72)$$

EW-Problem von $\underline{L}^2 \rightarrow Y_{lm} \dots$ Kugelflächenfkt. } VONS
 $l=0, 1, 2, \dots$ } in (ϑ, φ) -Raum
 $m=-l, \dots, l$ } auf Einheits-
Kugel

Eigenschaften:

Orthonormierung: $\int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

Vollständigkeitsrelation: $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') = \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') \delta(\varphi - \varphi')$

(5) Gesamtlösung:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (\alpha_{lm} r^l + \beta_{lm} r^{-(l+1)}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (3.73)$$

Gebiete mit $r=0$: $\beta_{lm} = 0$

$r=\infty$: $\alpha_{lm} = 0$ für $l > 1$

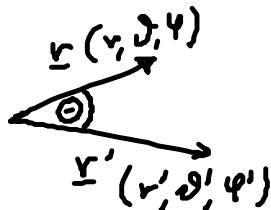
$l=1 \rightarrow$ homogenes E-Feld

(6) Zylindersymmetrie: keine φ -Abhängigkeit

\rightarrow nur $m=0$ mit $Y_{l0} \sim P_l(\cos\vartheta) \dots$ Legendre Polynome

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta) \quad (3.74)$$

(7) Additionstheorem:



$$\boxed{\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\Theta)} \quad (3.75)$$

• Grenzfkt. ausdrückt nach Y_{lm} :

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{1/2}} \stackrel{\text{o.B.}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\theta) \quad \text{mit} \quad (3.76)$$

$r_{>} = \max(r, r')$
 $r_{<} = \min(r, r')$

mit (3.75)
 $\rightarrow Y_{lm}$

Beweis: mit Hilfe von Erzeugende der P_l (s. Übungen)

• Anwendung: s. Übungen

• Z_y in der Koord. / Zylinder symmetrie: \rightarrow Besselfkt.

• Potential Theorie in 2D: z.B. in unendl. lang Geometrien \rightarrow keine z -Abhängigkeit



(1) Grenzfkt: $G(r-r') = \ln|r-r'|$ (3.77)

Beweis: „s. Übung“ [Schwab]

(2) Zugang über Fkt. Theorie:

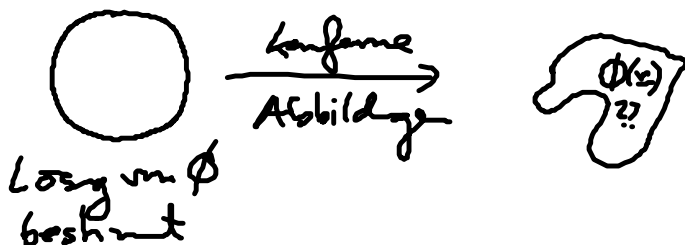
ϕ in komplex vertiger, analytischer Fkt.:

$$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad z = x+iy$$

\rightarrow Cauchy-Riemann-D.Gl.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

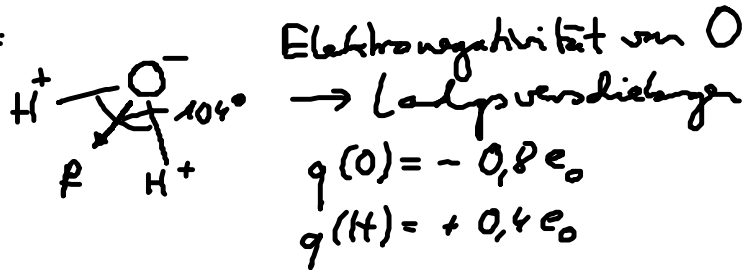
↖ Falllinien + Äquipotentiallinien von ϕ



3.6 Multipolentwicklung

- Motivation: Wie sehen Ladungsverteilungen von Weitem aus?
 → Klassifizierung von Ladungsverteilungen: Momente
 → " " ihre Potentiale/Felder

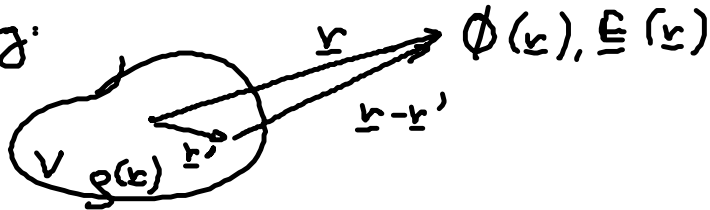
Bsp: (1) H_2O -Molekül:



→ neutral, aber elektr. Dipol p

(2) Atombindung: → elektr. Quadrupole

Problembestellung:



Entwicklung nach Moment der Ladungsverteilung:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} d^3r' \quad (3.10)$$

Taylorentwicklung um r : $r = |r|$, $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $r = (x_1, x_2, x_3)$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} - x'_i \nabla_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \underbrace{x'_i x'_j}_{x'_i x'_j - \frac{1}{2} r'^2 \delta_{ij}} \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n} \frac{1}{r} + \dots \quad (3.79)$$

da $\delta_{ij} \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} = \nabla^2 \frac{1}{r} = 0$

(1) Momente der Ladungsverteilung. (3.79) in (3.10)

$$\text{(Gesamt)Ladung: } q = \int \rho(\underline{r}') d^3 r'$$

$$\text{Dipolmoment: } p_i = \int x_i' \rho(\underline{r}') d^3 r'$$

$$\text{Quadrupolmoment: } Q_{ij} = \int (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\underline{r}') d^3 r'$$

$$\text{mit } \sum_p Q_{pp} = Q_{ii} = 0!$$

höheres Multipolmoment:

$$M_{i_1 \dots i_n} \sim \int (x_{i_1}' \dots x_{i_n}' - \dots) \rho(\underline{r}') d^3 r'$$

Tens mit
 $r'^2 \delta_{ij}$

(3.80)

(2) Potential. (3.79) in (3.10) mit (3.80)

$$\rightarrow \phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} - p_i \nabla_i \frac{1}{r} + \frac{1}{6} Q_{ij} \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} + \dots M_{i_1 \dots i_n} \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n} \frac{1}{r} + \dots \right]$$

$$\text{verwende: (i) } \nabla_i \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla_i r = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\text{(ii) } \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} = 3 \frac{x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \quad (\text{o.B.})$$

$$[Q_{ij} \delta_{ij} = Q_{ii} = 0]!$$

$$\rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]} \quad (3.81)$$

$$\rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(\underline{r})$$

3.6.1 Diskussion der Multipol-Momente

• (1) Monopol: $\phi_m(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \rightarrow \underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3}$

= Potential/Feld einer Punktladung $\rho_m = q \delta(\underline{r})$