

## 4.2 Makroskopische Gln. der Elektrodyn.

• makroskopische  $\underline{E}$ -Feld:  $\underline{E}(\underline{r}, t) = \langle \underline{e}(\underline{r}, t) \rangle$  (4.6)

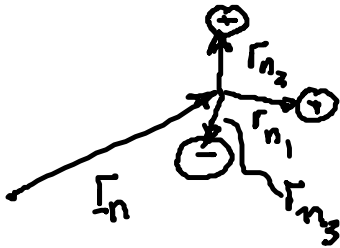
• Ladungsdichte:  $\rho(\underline{r}) = \rho_f(\underline{r}) + \rho_b(\underline{r}) \rightarrow \langle \rho \rangle$  (4.7)

(1)  $\rho_f(\underline{r}) = \sum_{i(n)} q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \rightarrow \rho_f = \langle \rho_f \rangle$  (4.8)

(2)  $\rho_b(\underline{r}) = \sum_n \rho_n(\underline{r})$

$n$ -tes Molekül:  $\rho_n(\underline{r}) = \sum_{i(n)} q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$  (4.9)  
 $= \sum_{i(n)} q_i \delta(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{n_i}))$

z.B.:  $\text{H}_2\text{O}$



(3) Mittelung für Molekül

$$\langle \rho_n(\underline{r}) \rangle \stackrel{(4.3)}{=} \sum_{i(n)} q_i f(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{n_i}))$$

Taylor  
 um  $\underline{r}_n$

$$\sum_{i(n)} q_i \left[ f(\underline{r} - \underline{r}_n) - \underline{r}_{n_i} \cdot \nabla f(\underline{r} - \underline{r}_n) + \frac{1}{2} (\underline{r}_{n_i})_k (\underline{r}_{n_i})_l \nabla_k \nabla_l f(\underline{r} - \underline{r}_n) + \dots \right]$$

→ molekulare Dipolmomente:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ molekulare Ladung: } q_n &= \sum_{i(n)} q_i & (4.10) \\
 2. \text{ " Dipolmoment: } p_n &= \sum_{i(n)} q_i r_{ni} \\
 3. \text{ " Quadrupolmom.: } (Q_n)_{kl} &= 3 \sum_{i(n)} q_i (r_{ni})_k (r_{ni})_l
 \end{aligned}$$

NB: Vgl. Momente einer kont. Ladungsverteilung (Gl 3.80)  
aber:  $\underline{Q}$  ohne  $r_{ni}^2$ !

also:

$$\begin{aligned}
 \langle p_n(r) \rangle &= q_n f(r-r_n) - p_n \cdot \nabla f(r-r_n) + \frac{1}{6} (Q_n)_{kl} \nabla_k \nabla_l f(r-r_n) \\
 &= \langle q_n \delta(r-r_n) \rangle - \nabla \cdot \langle p_n \delta(r-r_n) \rangle + \frac{1}{6} \nabla_k \nabla_l \langle (Q_n)_{kl} \delta(r-r_n) \rangle
 \end{aligned}$$

... „Verschmierung punktförmiger molekularer Multipole“ (4.11)

(4) → gemittelte gebundene Ladungsdichte

$$\langle p_b(r) \rangle = \sum_n \langle p_n(r) \rangle$$

$$\rightarrow \langle p_b(r) \rangle = p_M(r) - \nabla \cdot \underline{P}(r) + \nabla_k \nabla_l Q_{kl} + \dots \quad (4.12)$$

mit makroskopischen Dichtern:

$$\begin{aligned}
 \text{Ladungsdichte: } p_M(r) &= \left\langle \sum_n q_n \delta(r-r_n) \right\rangle \\
 \text{Dipolmomentendichte: } \underline{P}(r) &= \left\langle \sum_n p_n \delta(r-r_n) \right\rangle & (4.13) \\
 \text{"Polarisation"} \\
 \text{Quadrupolmomentendichte: } \underline{Q}(r) &= \left\langle \sum_n \frac{1}{6} Q_n \delta(r-r_n) \right\rangle
 \end{aligned}$$

(5) gemittelte mikroskopische Ladungsdichte:

$$\begin{aligned}
 \langle p(r) \rangle &\stackrel{(4.7)}{=} \langle p_f(r) \rangle + \langle p_b(r) \rangle \\
 &\stackrel{(4.8)}{=} p_f(r) + p_M(r) - \nabla \cdot \underline{P}(r) + \nabla_k \nabla_l Q_{kl}(r) & (4.14) \\
 &\stackrel{(4.14)}{=} \dots
 \end{aligned}$$

- makroskopische Feldgleichungen: (4.11)
  - $\rightarrow \langle \text{div } \underline{e} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho_{\text{ext}} \rangle$  und  $\langle \text{rot } \underline{e} \rangle = 0$

$$\langle \underline{e} \rangle = \underline{E}$$

$$\rightarrow$$

$$\langle \nabla \underline{e} \rangle = \nabla \langle \underline{e} \rangle$$

$$\text{div } \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \rho_{\text{ext}}(\underline{r}) + \rho_{\text{int}}(\underline{r}) \right] \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \rho_{\text{ext}}(\underline{r}) - \nabla \cdot \underline{P}(\underline{r}) + \nabla_b \cdot \nabla_k \underline{Q}_{ik}(\underline{r}) \right]$$

- Führe ein: (di)elektrische Verschiebungsfeld:

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r}) - \nabla \underline{Q}(\underline{r}) \quad (4.16)$$

NB: (i) höhere Multipole werden in Hilfsfeld  $\underline{D}(\underline{r})$  gesteckt  $\rightarrow$  Materialgesetz

(ii)  $[\nabla \underline{Q}]_i = \nabla_j Q_{ij}$  werden i.R. vernachlässigt

also: (4.16)  $\rightarrow$   $\text{div } \underline{D} = \rho_{\text{ext}}(\underline{r})$  und:  $\text{rot } \underline{E} = 0$  (4.17)

NB: (i) „Die Quellen von  $\underline{D}$  sind die makroskopische Ladungsdichten und nicht höhere Multipole“

(ii)  $\underline{E}$  ist das fundamentale Feld

- Materialgesetze für Polarisation:

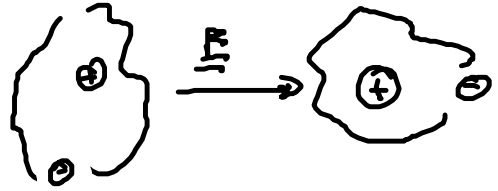
(1) Ferroelektrizität: ausgerichtete, permanente Dipole  
 Bsp.  $\text{BaTiO}_3$  ↑↑↑↑

## (2) Induzierte Polarisation

- (i) Orientierungspolarisation  
z.B. gegen therm. Bewegung



- (ii) Verschiebungspolarisation  
induzierte Dipole



→ allgemeines nichtlineares anisotropes Materialgesetz

$$\underline{P}_i(\underline{E}) = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots \quad (4.18)$$

$\chi$  Tensoren der elektr. Suszeptibilität

(i)  $\underline{P} \propto \underline{E}$

(ii)  $\chi^{(2)}$  etc → nichtlineare Optik

→ lineares, isotropes, Dielektrikum:

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad (4.19)$$

gut für Gase, Flüssigkeiten, isotrope/kubische Festkörper

• dielektrische Verschiebung: lineares Dielektrikum

$$\underline{D}(\underline{r}) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}) + \underline{P}(\underline{r}) = \underline{\epsilon} \underline{E}(\underline{r}) \quad (4.20)$$

mit  $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$

... dielektrischer Tensor (Konstante)

• relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität)  $\epsilon_r$ : isotrope Medien

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (4.21) \rightarrow \chi_e = \epsilon_r - 1 \quad (4.21a)$$

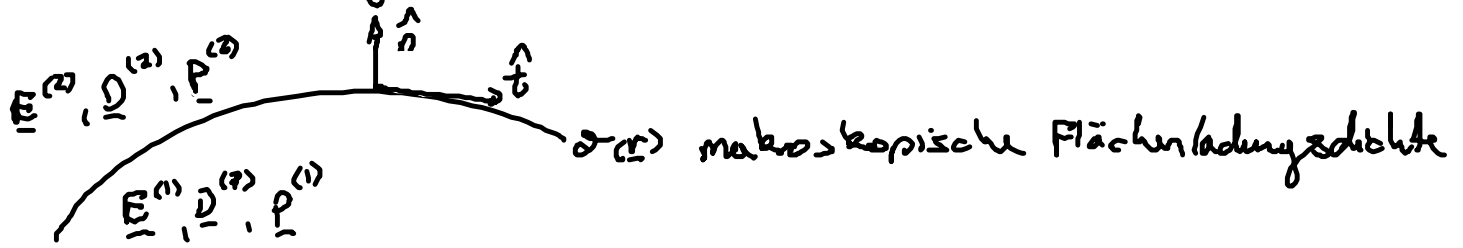
atomare Polarisierbarkeit  $\alpha$ : Dipolmoment  $\underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E} \quad (4.22)$

mit  $n = \frac{N}{V}$  Polarisierung  $\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E} \rightarrow \chi_e = n \alpha \quad (4.23)$

## 4.3 Randbedingungen von Dielektrika + Anwendungen

# 4.3.1 Randbedingungen mit Polarisationsladung

• Geometrie: [vgl. Kap. 3.4.1] hier 2D-Bild



(1) Tangential komp. von  $\underline{E}$   
 $\text{rot } \underline{E} = 0$  "Schleife"

$$\hat{t} \cdot (\underline{E}^{(2)} - \underline{E}^{(1)}) = 0 \Leftrightarrow E_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel}^{(2)} \quad (3.48)$$

$$(4.24)$$

(2) Normal komp. von  $\underline{D}$   
 $\text{div } \underline{D} = \rho_{\text{Ma}}$  "Box"

$$\hat{n} \cdot (\underline{D}^{(2)} - \underline{D}^{(1)}) = D_{\perp}^{(2)} - D_{\perp}^{(1)} = \sigma \quad (4.25)$$

insbes. lineares, isotropes Dielektrikum

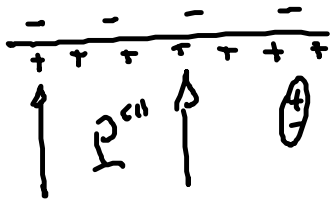
$$(4.26) \rightarrow \boxed{\epsilon_2 E_{\perp}^{(2)} = \epsilon_1 E_{\perp}^{(1)} + \sigma} \quad (4.26)$$

(3) Normal komp.  $\underline{E}, \underline{P}, \sigma = 0$

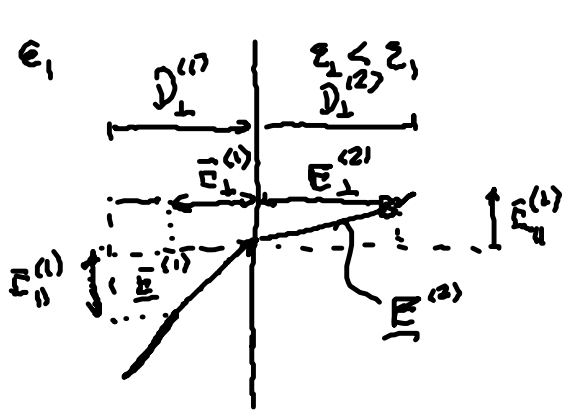
$$\underline{D}_{\perp}^{(2)} = \epsilon_0 \underline{E}_{\perp}^{(2)} + \underline{P}_{\perp}^{(2)} \xrightarrow{(4.25)} \underline{D}_{\perp}^{(1)} = \epsilon_0 \underline{E}_{\perp}^{(1)} + \underline{P}_{\perp}^{(1)}$$

$$\boxed{E_{\perp}^{(2)} - E_{\perp}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon_0} (P_{\perp}^{(2)} - P_{\perp}^{(1)}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p}$$

$\sigma_p$  - Polarisationsladung an Oberfläche



• Bsp: "Brechungsgesetz"  $\sigma = 0$



$$E_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel}^{(2)}$$

$$E_{\perp}^{(2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{\perp}^{(1)}$$

Beim Übergang zu dielektrischen  
dünneren Medium,  
Bricht der Strahl zum Lot hin

(4.25)