

## 4.3 Randbedingungen von Dielektrika & Anwendungen

### 4.3.1. Randbedingungen & Polarisationsladung

(1)  $\text{rot } \underline{E} = 0 \iff \boxed{\underline{E}_{\parallel}^{(1)} = \underline{E}_{\parallel}^{(2)}} \quad (4.24)$

(2)  $\text{div } \underline{D} = \rho_{\text{Ma}} \iff \boxed{D_{\perp}^{(2)} - D_{\perp}^{(1)} = G} \quad (4.25)$

bzw  
 $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \implies \boxed{E_{\perp}^{(2)} - E_{\perp}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\perp}^{(2)} - \rho_{\perp}^{(1)}) = \frac{1}{\epsilon_0} G_P} \quad (4.27)$   
 $G_P \dots$  Polarisationsladung

• elektrostatisches Potential:

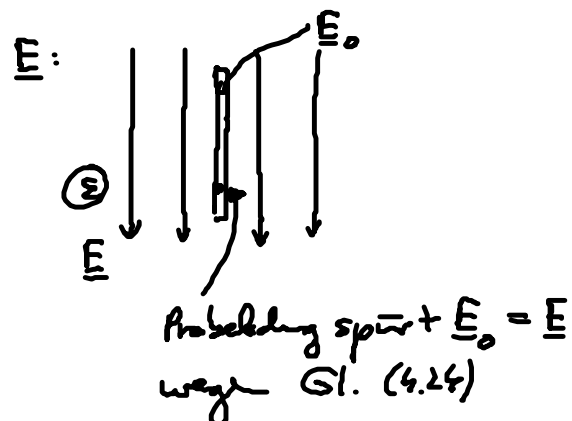
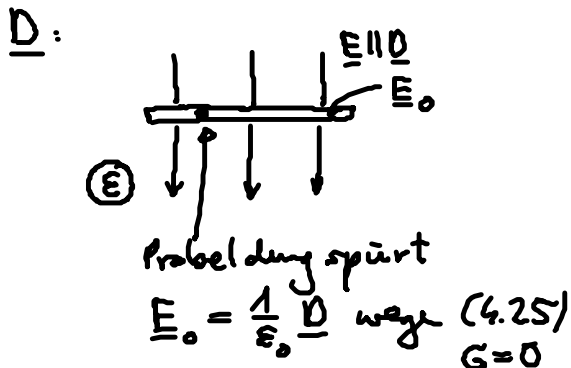
$\text{rot } \underline{E} = 0 \implies \underline{E} = -\nabla \phi$

homogenes Dielektrikum:  $\underline{D} = \epsilon \underline{E} \implies \text{div } \underline{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{Ma}}$

$\implies \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{Ma}}} \quad (4.29)$

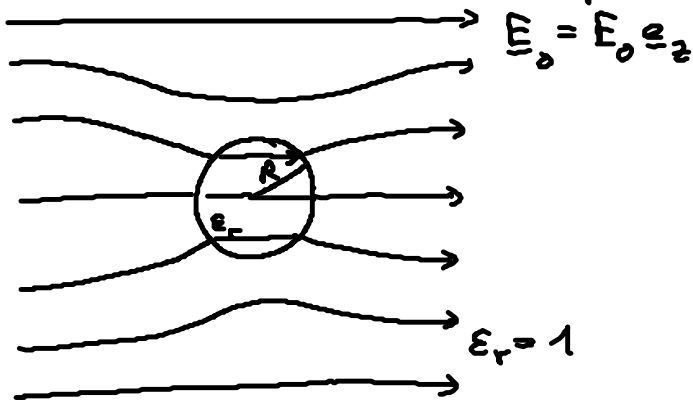
insbes.:  $\rho_{\text{Ma}} = 0: \nabla^2 \phi = 0$  & Stetigkeitsbed. aus (4.24)/(4.25)

• Messung von  $\underline{D}, \underline{E}$ : schmaler Schlitz im Dielektrikum



## 4.3.2 Elektrische Felder

- instruktives Bsp: dielekt. Kugel ( $\epsilon, \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$ )  
in äußeren Feld  $\underline{E}_0$

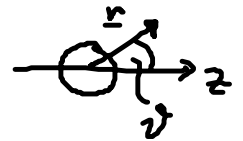


• (i) Lösung:  $\rho_{\text{un}} = 0 \xrightarrow{(4.29)} \nabla^2 \phi = 0$

Lösungsansatz: Gl. (3.74)

$$\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^{(i,a)} r^l + b_l^{(i,a)} r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta) \quad (4.29)$$

inner außen



Randbedingungen:

(i)  $r \rightarrow \infty$ :  $E_0 e_z = -\nabla \phi_a \rightarrow P_1(\cos\vartheta)$

$$\phi_a(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos\vartheta$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1^{(a)} = -E_0 \\ b_1^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

(ii)  $r = 0$  :

(iii)  $r = R$ :  $\begin{cases} E_{\parallel}^{(i)} = E_{\parallel}^{(a)} \\ \epsilon_r E_{\perp}^{(i)} = E_{\perp}^{(a)} \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} a_1^{(i)} = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \\ b_1^{(a)} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0 \\ \dots = 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweis: s. Übungen

$$r \cos\vartheta = z = r \cdot e_z$$

$$\phi_i = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \cdot r$$

$$\rightarrow \phi_a = -E_0 \cdot r + \frac{p \cdot r}{r^3} \quad \text{später (4.32)}$$

(ii) Densung:  $\underline{E} = -\nabla\phi$

(1) innen:

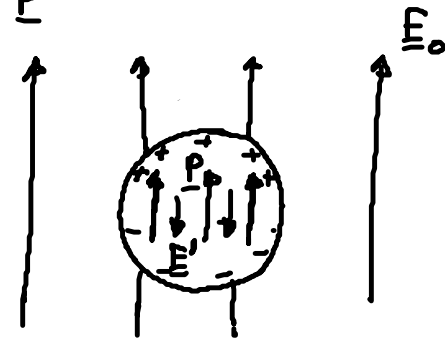
homog.  $\underline{E}$ -Feld:  $\underline{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0 \stackrel{\text{Trick}}{=} \underline{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0$

homog. Polarisation:  $\underline{P} = \epsilon_0 \underbrace{(\epsilon_r - 1)}_{\chi_e} \underline{E}_i = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0$

Dipolmoment Kugel:  $\underline{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \underline{P}$

→  $\underline{E}_i = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{p}$  (4.33)

Entelektisierungs-  
feld  $\underline{E}'$



NB:  $\underline{E}'$  schwächt/schirmt  $\underline{E}_0$  ab!

Grund: Oberflächenladungen durch Polarisation

(4.27):  $\underline{G}_p = \underline{P}_\perp = \underline{P} \cdot \underline{e}_r = P \cos\theta$  (4.34)

(2) außen:

→  $\underline{E}_a = \underline{E}_0 - \underbrace{\nabla \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3}}_{\text{Dipolfeld vmp}}$

• Verallgemeinerung: dielekt. Ellipsoid in  $\underline{E}_0$  (o.B.)

(i) homogene Polarisation  $\underline{P}$

(ii) Entelektisierungs-feld

$\underline{E}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \underline{\lambda} \underline{P}$  (4.35)

Entelektisierungstensor/-faktor



Eigenschaften:

(1) Diagonalisierung von  $\underline{\lambda}$

(im Hauptachsensystem  
des Ellipsoids)

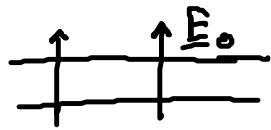
$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$(2) \sum_p \Delta = \lambda_{ii} = 1$$

(iii) Beispiele:

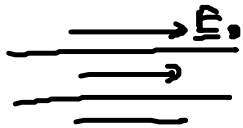
(1) Kugel:  $\lambda = \frac{1}{3}$  (jede Richtung!)

(2) dünne Platte:



$$\lambda = 1$$

$[\underline{D}_\perp \text{ ist stetig}]$

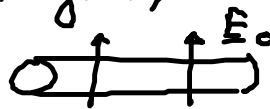


$$\lambda = 0$$

$(\underline{P} = 0 \leftrightarrow \nabla_p = 0)$

$[\underline{E}_\parallel \text{ ist stetig}]$

(3) langer Zylinder:



$$\lambda = \frac{1}{2}$$

(alle Richtungen  $\perp$  Zylinder)



$$\lambda = 0$$

• komplexere dielekt. Körper in  $\underline{E}_0$ : (o.B.)

kein homogenes  $\underline{P}$ !

### 4.3.3 Clausius - Mosotti - Formel

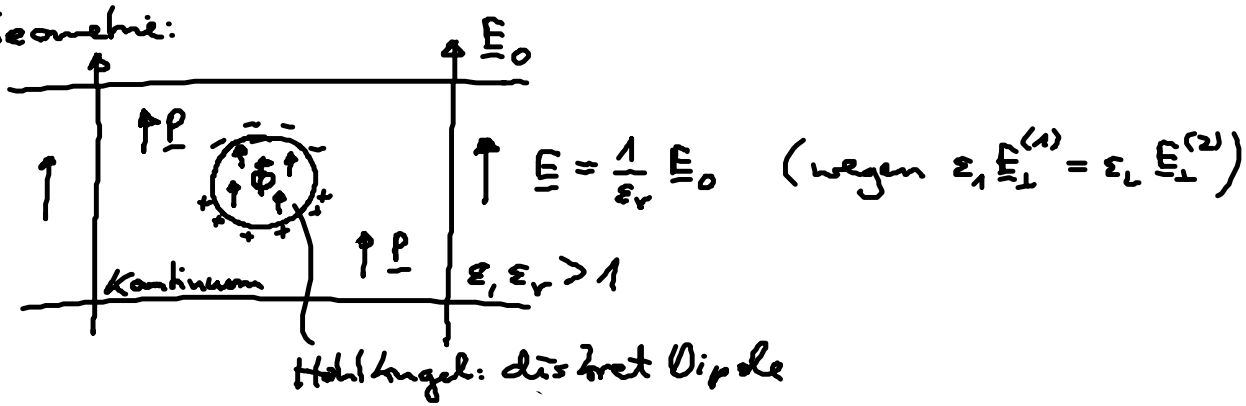
• molekulare Polarisierbarkeit  $\alpha$ :

induz. Dipolmoment eines Moleküls:  $\underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E}_{loc}$

↳ lokales Feld

Frage:  $\alpha \longleftrightarrow \underbrace{\epsilon, \epsilon_r, \chi_e}_{\text{Kontinuumsgroßen}}$

• Geometrie:



(i) Bestimme:  $\underline{E}_{loc}$  auf  $\Phi$

$$\underline{E}_{loc} = \underline{E} + \underbrace{\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}}_{\text{Lorentzfeld in Hohlkugel}} + \underbrace{\underline{E}_{dip}}_{\text{Feld von dispersiertem Dipol}}$$

+ ... da Hohlkugel

$$\underline{E}_{dip} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{für kubisches Gitter} \\ \text{Flüssigkeiten} \\ \text{Gase} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wegen isotroper} \\ \text{Symmetrie} \end{array}$$

(ii) also: Polarisation  $\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_{loc} = \epsilon_0 n \alpha \left( \underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \right)$

↙ Dipoldichte

$$\rightarrow \underline{P} = \epsilon \chi_e \underline{E} \quad \text{mit} \quad \chi_e = \frac{n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha} \quad (4.37)$$

(iii) relative Dielektrizitätskonstante:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{1 + \frac{2}{3} n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha} \quad (4.38)$$

(iv) Clausius-Mosotti-Formel:

$$(4.38) \rightarrow \epsilon_r \left( 1 - \frac{1}{3} n \alpha \right) = 1 + \frac{2}{3} n \alpha \rightarrow \epsilon_r - 1 = \frac{1}{3} n \alpha (2 + \epsilon_r)$$

$$\rightarrow \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3} n \alpha \quad (4.39)$$

in Optik: Lorentz-Lorentz-Formel mit  $\bar{n} = \sqrt{\epsilon_r}$  ... Brechindex

(v) Base:  $n \alpha \ll 1$

$$(4.37) \rightarrow \boxed{\chi_e = n\alpha \leftrightarrow \epsilon_r = 1 + n\alpha} \quad (4.40)$$

NB: Vernachlässigung des Lorentzfeldes

• allgemeine Kristalle: Beiträge von  $\underline{E}_{dip}$

#### 4.4 Elektrostatische Energie im Dielektrikum

• Energie einer makroskopischen Ladungsverteilung  $\rho = \rho_{Ma}$ :

im Vakuum:  $U = \frac{1}{2} \int \rho(\underline{r}) \phi(\underline{r}) d^3r \quad (3.29)$

$\hat{=}$  Arbeit um Ladungsverteilung zusammenzubringen  
im Dielektrikum:  $U = ??$

and Arbeit um  $\underline{P}$  in Dielektrikum zu erzeugen