

4.3 Randbedingungen von Dielektrika & Anwendungen

4.3.1. Randbedingungen & Polarisationsladung

(1) $\text{rot } \underline{E} = 0 \iff \underline{E}_{\parallel}^{(1)} = \underline{E}_{\parallel}^{(2)} \quad (4.24)$

(2) $\text{div } \underline{D} = \rho_{\text{Ma}} \iff \underline{D}_{\perp}^{(2)} - \underline{D}_{\perp}^{(1)} = \underline{G} \quad (4.25)$

bzw
 $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$
 $\underline{E}_{\perp}^{(2)} - \underline{E}_{\perp}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\underline{P}_{\perp}^{(2)} - \underline{P}_{\perp}^{(1)}) = \frac{1}{\epsilon_0} \underline{G}_P \quad (4.27)$
 $\underline{G}_P \dots$ Polarisationsladung

• elektrostatisches Potential:

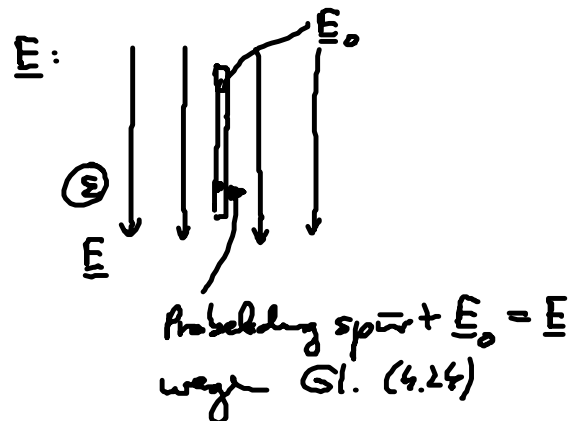
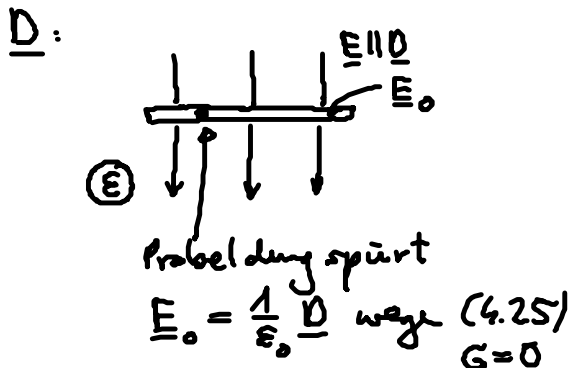
$\text{rot } \underline{E} = 0 \rightarrow \underline{E} = -\nabla \phi$

homogenes Dielektrikum: $\underline{D} = \epsilon \underline{E} \rightarrow \text{div } \underline{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{Ma}}$

$\rightarrow \nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_{\text{Ma}} \quad (4.29)$

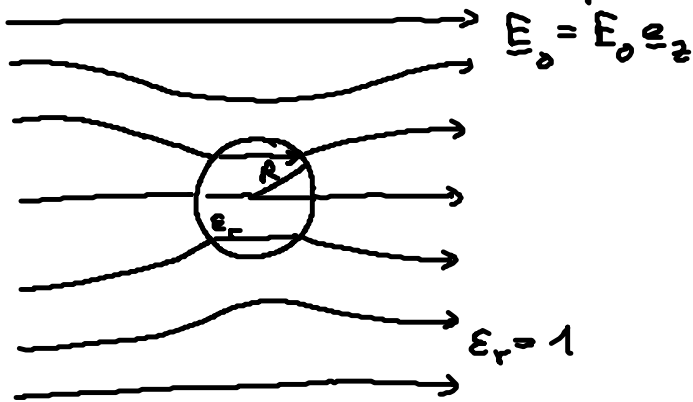
insbes.: $\rho_{\text{Ma}} = 0: \nabla^2 \phi = 0$ & Stetigkeitsbed. aus (4.24)/(4.25)

• Messung von $\underline{D}, \underline{E}$: schmaler Schlitz im Dielektrikum



4.3.2 Elektrische Felder

- instruktives Bsp: dielekt. Kugel ($\epsilon, \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$)
in äußenem Feld \underline{E}_0

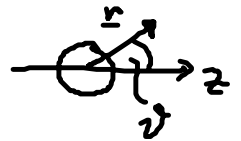


• (i) Lösung: $\rho_{\text{un}} = 0 \xrightarrow{(4.29)} \nabla^2 \phi = 0$

Lösungsansatz: Gl. (3.74)

$$\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l^{(i,a)} r^l + b_l^{(i,a)} r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta) \quad (4.29)$$

\nearrow innen \searrow außen



Randbedingungen:

(i) $r \rightarrow \infty$: $E_0 \underline{e}_z = -\underline{\nabla} \phi_a \rightarrow P_1(\cos\vartheta)$

$$\phi_a(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos\vartheta$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1^{(a)} = -E_0 \delta_{l,1} \\ b_l^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

(ii) $r = 0$:

(iii) $r = R$: $\underline{E}_{\parallel}^{(i)} = \underline{E}_{\parallel}^{(a)}$
 $\epsilon_r \underline{E}_{\perp}^{(i)} = \underline{E}_{\perp}^{(a)}$

$$\begin{cases} a_1^{(i)} = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \\ b_1^{(a)} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0 \\ \dots = 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

Beweis: s. Übungen

$$r \cos\vartheta = z = r \cdot \underline{e}_z$$

$$\phi_i = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0 \cdot \underline{r}$$

$$\rightarrow \phi_a = -\underline{E}_0 \cdot \underline{r} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad \text{später (4.32)}$$

(ii) Dichtung: $\underline{E} = -\nabla\phi$

(1) innen:

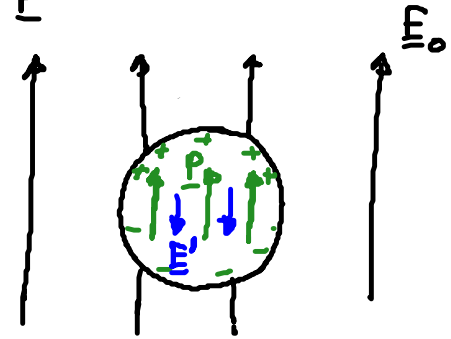
homog. \underline{E} -Feld: $\underline{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0 \stackrel{\text{Trick}}{=} \underline{E}_0 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0$

homog. Polarisation: $\underline{P} = \epsilon_0 \underbrace{(\epsilon_r - 1)}_{\chi_e} \underline{E}_i = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \underline{E}_0$

Dipolmoment Kugel: $\underline{p} = \frac{4\pi}{3} R^3 \underline{P}$

→ $\underline{E}_i = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{p}$ (4.33)

Entelektisierungs-
feld \underline{E}'



NB: \underline{E}' schwächt/schirmt \underline{E}_0 ab!

Grund: Oberflächenladungen durch Polarisation

(4.27): $G_p = P_{\perp} = \underline{P} \cdot \underline{e}_r = P \cos\theta$ (4.34)

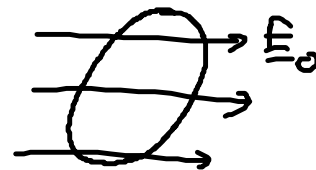
(2) außen:

→ $\underline{E}_a = \underline{E}_0 - \underbrace{\nabla \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3}}_{\text{Dipolfeld vmp}}$

• Verallgemeinerung: dielekt. Ellipsoid in \underline{E}_0 (o.B.)

(i) homogene Polarisation \underline{P}

(ii) Entelektisierungs-feld



$\underline{E}' = -\frac{1}{\epsilon_0} \underline{\lambda} \underline{P}$ (4.35)

Entelektisierungstensor/-faktor

Eigenschaften:

(1) Diagonalisierung von $\underline{\lambda}$

(im Hauptachsensystem
des Ellipsoids)

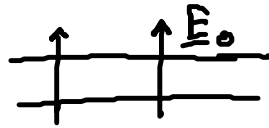
$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$(2) \sum_p \Delta = \lambda_{ii} = 1$$

(iii) Beispiele:

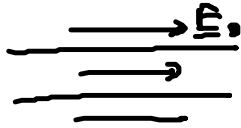
(1) Kugel: $\lambda = \frac{1}{3}$ (jede Richtung!)

(2) dünne Platte:



$$\lambda = 1$$

$[\underline{D}_\perp \text{ ist stetig}]$



$$\lambda = 0$$

$(\underline{P} = 0 \Leftrightarrow \underline{D}_p = 0)$

$[\underline{E}_\parallel \text{ ist stetig}]$

(3) langer Zylinder:



$$\lambda = \frac{1}{2}$$

(alle Richtungen \perp Zylinder)



$$\lambda = 0$$

• komplexere dielekt. Körper in \underline{E}_0 : (o.B.)

kein homogenes \underline{P} !

4.3.3 Clausius - Mosotti - Formel

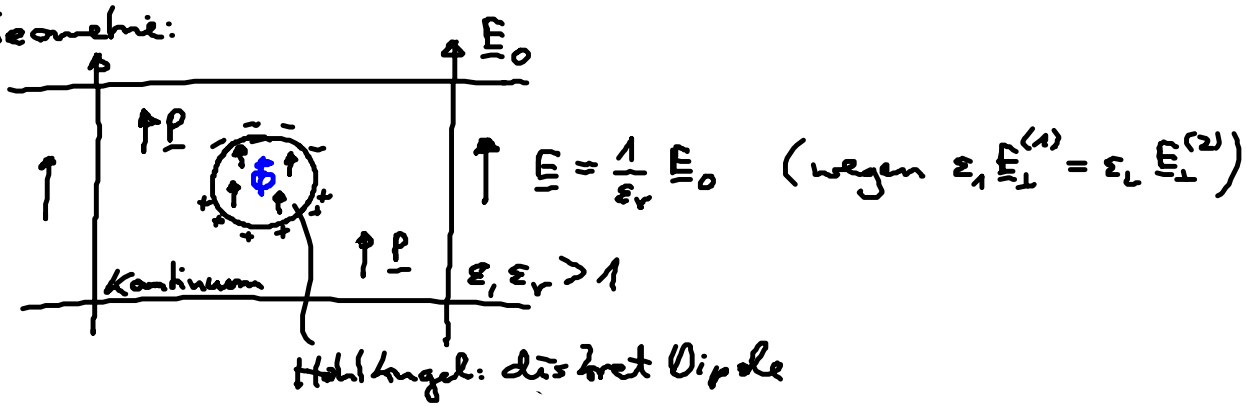
• molekulare Polarisierbarkeit α :

induz. Dipolmoment eines Moleküls: $\underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E}_{loc}$

↳ lokales Feld

Frage: $\alpha \longleftrightarrow \underbrace{\epsilon, \epsilon_r, \chi_e}_{\text{Kontinuumsgroßen}}$

• Geometrie:



(i) Bestimme: \underline{E}_{loc} auf Φ

$$\underline{E}_{loc} = \underline{E} + \underbrace{\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}}_{\text{Lorentzfeld in Hohlkugel}} + \underbrace{\underline{E}_{dip}}_{\text{Feld von discret Dipol}}$$

+ ... da Hohlkugel

$\underline{E}_{dip} = 0$ für kubisches Gitter } wegen isotroper
 Flüssigkeit } Symmetrie
 Gase }

(ii) also: Polarisation $\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_{loc} = \epsilon_0 n \alpha (\underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P})$

$$\rightarrow \underline{P} = \epsilon \chi_e \underline{E} \quad \text{mit} \quad \chi_e = \frac{n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha} \quad (4.37)$$

(iii) relative Dielektrizitätskonstante:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{1 + \frac{2}{3} n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha} \quad (4.38)$$

(iv) Clausius-Mosotti-Formel:

$$(4.38) \rightarrow \epsilon_r (1 - \frac{1}{3} n \alpha) = 1 + \frac{2}{3} n \alpha \rightarrow \epsilon_r - 1 = \frac{1}{3} n \alpha (2 + \epsilon_r)$$

$$\rightarrow \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3} n \alpha \quad (4.39)$$

in Optik: Lorentz-Lorentz-Formel mit $\bar{n} = \sqrt{\epsilon_r}$... Brechindex

(v) Base: $n \alpha \ll 1$

$$(4.37) \rightarrow \boxed{\chi_e = n\alpha \Leftrightarrow \epsilon_r = 1 + n\alpha} \quad (4.40)$$

NB: Vernachlässigung des Lorentzfeldes

• allgemeine Kristalle: Beiträge von \underline{E}_{dip}

4.4 Elektrostatische Energie im Dielektrikum

• Energie einer makroskopischen Ladungsverteilung $\rho = \rho_{Ma}$:

im Vakuum: $U = \frac{1}{2} \int \rho(\underline{r}) \phi(\underline{r}) d^3r \quad (3.29)$

$\hat{=}$ Arbeit um Ladungsverteilung zusammenzubringen
im Dielektrikum: $U = ??$

and Arbeit um \underline{P} in Dielektrikum zu erzeugen