5.4. Kleine Stromverteilungen: der magnetische Dipol

5.4.1. Felder kleiner Stromverteilungen

$$\boxed{\underline{m} = \frac{1}{2}\int \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')\, d^3r'} \qquad (5.31)$$

... magnet. Dipolmoment

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\underline{m}\times\underline{r}}{r^3}} \qquad (5.32)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\underline{B}(\underline{r}) &= \operatorname{rot}\underline{A} = -\underline{\nabla}\,\frac{\underline{m}\cdot\underline{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\underline{m}\cdot\hat{\underline{r}})\hat{\underline{r}} - \underline{m}}{r^3}\end{aligned}} \qquad (5.33)$$

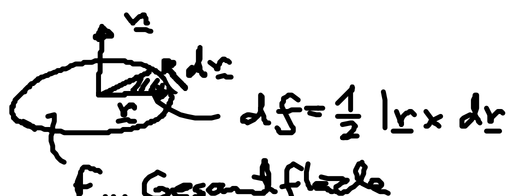
- Dipolmoment einer Stromschleife:

$$\underline{j}\, d^3r = I\, d\underline{r} \qquad (5.3)$$

(i) (5.3) in (5.31): $\boxed{\underline{m} = \frac{I}{2}\oint \underline{r}\times d\underline{r}}$ (5.34)

(ii) ebene Schleife:

$$\xrightarrow{(5.34)} \quad \boxed{\underline{m} = I\,F\,\underline{n}}$$



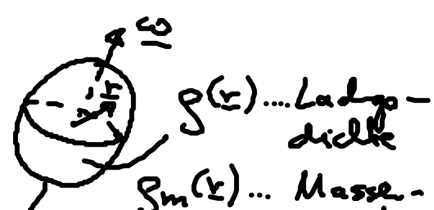
- gyromagnetisches Verhältnis: ($\rightarrow$ Atomphysik)

(i) starrer rotierender Körper:

$\longrightarrow$ lokale Geschwindigkeit: $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega}\times\underline{r}$

Stromdichte: $\underline{j} = \rho\,\underline{v}$

Impulsdichte: $\rho_m \underline{v}$



$$\longrightarrow \quad \begin{aligned}&\text{Dipolmoment:} && \underline{m} = \frac{1}{2}\int \rho(\underline{r})\,\underline{r}\times\underline{v}(\underline{r})\,d^3r \\ &\text{Drehimpuls:} && \underline{L} = \int \rho_m(\underline{r})\,\underline{r}\times\underline{v}(\underline{r})\,d^3r\end{aligned} \qquad (5.36)$$

(ii) Annahme: $\frac{\rho(\underline{r})}{\rho_m(\underline{r})} = \frac{q}{M} =$ Gesamt $\frac{\text{Ladung}}{\text{Masse}}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{m} = \frac{q}{2M}\,\underline{L}} \quad (5.37)$$

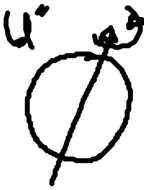
Bsp: Bahndrehimpuls Elektron: $q = -e_0$

$M = m_e$

(iii) Abweichung von (5.37) für Spin:

= intrinsischer Drehimpuls: Effekt von QM & RT

„Bild"



$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{m} = g\,\frac{q}{2m}\,\underline{L}} \quad (5.38)$$

... g-/Landé-Faktor

Bsp: e^--Spin: $g \approx 2$

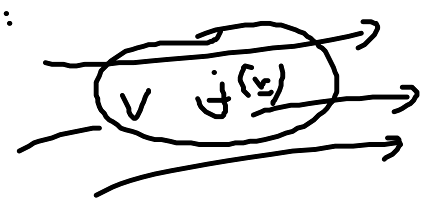
Proton: $g \approx 2 \times 2.79$

Neutron: $g \approx 2 \times (-1.91)$ (mit $q_{\text{fiktiv}} = e_0$)

- Erde = magnetischer Dipol:
  - angetrieben durch Ströme im flüssigen äußeren Erdkern
  - wenige Grad geneigt gegen Erdachse
  - Umpolung alle 200.000 Jahre

5.4.2 Kraft, Drehmoment, & Energie

- Problemstellung:



externe magnet. Induktion $\underline{B}(\underline{r})$

(wenig Änderung in V)

• Kraft auf V mit $\underline{j}(\underline{r})$:

Gl. (5.16) $\longrightarrow$ $\underline{F} = \int \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r})\, d^3r$

$$\overset{\text{Taylor}}{\underset{\text{von } \underline{B} \text{ um } \underline{r}=0}{=}} \int \underbrace{\underline{j}(\underline{r})}_{=0!\ (5.29)} \times \left[\underline{B}(0) + \underline{r}\cdot\underline{\nabla}\, \underline{B}(0) + \dots\right] d^3r$$

$\longrightarrow$ magnet. Moment

$$\underset{\text{und (5.30)}}{\overset{\text{wie in Kap. 5.4.1}}{=}} (\underline{m} \times \underline{\nabla}) \times \underline{B}(0)$$

$$= \underline{\nabla}(\underline{m}\cdot\underline{B}(0)) - \underline{m}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}(0))}_{=0}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F} = \underline{\nabla}(\underline{m}\cdot\underline{B})}$

... Dipole werden in $\underline{B}$ hineingezogen!

• potentielle Energie: von $\underline{m}$ in $\underline{B}$

$\underline{F} = -\underline{\nabla} U \longrightarrow \boxed{U = -\underline{m}\cdot\underline{B}}$ (5.40)

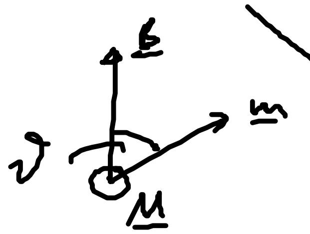
NB: (i) minimiere $U \longrightarrow \underline{m} \uparrow\uparrow \underline{B}$ („Kompaß-Prinzip")

(ii) U enthält nicht Energie, um $\underline{m}$ aufrecht zu erhalten

(iii) $\underline{B} = \underline{B}_{dipol}$ (5.33) $\longrightarrow$ Dipol-Ww-Energie: $\underline{m}_1 \uparrow \nearrow \underline{m}_2$

[(vgl. (3.31) für elektr. Dipole]

• Drehmoment $\underline{M}$:



$$U = -mB\cos\vartheta \longrightarrow M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -mB\sin\vartheta = -|\underline{m}\times\underline{B}|$$

dreht $\underline{m}$ nach $\underline{B}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{M} = \underline{m}\times\underline{B}}$ (5.41)

5.5 Magnetische Felder in Materie

- magnetische Induktion $\underline{B} \longleftrightarrow$ Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$
- In Materie: Behandlung analog zu Kap. 4.1/4.2

  (1) freie Ladungen : $\underline{j}_f(\underline{r},t)$ Bsp: e^- im Metall

  (2) gebundene " : $\underline{j}_b(\underline{r},t) \longleftrightarrow$ „lokalisierte Ströme"

  gebundene $e^- \longleftrightarrow \underline{j} \longleftrightarrow \underline{m}$ (magnet. Moment)

  (3) intrinsischer Spin: $\longrightarrow \underline{m}$ (s. Kap. 5.4.1)

  $\longrightarrow$ Ziel: gemittelte Beschreibung über Magnetisierung

- zuerst: Vervollständigung von $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ nötig

5.5.1 Einführung der Vakuumverschiebungsstromdichte

- bis jetzt: Magnetostatik

$$\underline{\nabla} \cdot \Big| \, \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \xrightarrow{(5.21)} \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$$

- aber volle Kont.gl. gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \underline{j} = 0 \quad (5.6)$$

$\longrightarrow$ Verallgemeinerung von Gl. (5.21) nötig

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{B} &= \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}} \quad (5.42)$$

… Ampèresches Gesetz & Maxwellsche Verallgemeinerung

mit $c^2 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$ [(Vakuum-Lichtgeschw.)^2]

NB: $\varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ …. (Vakuum-) Verschiebungsstromdichte [gilt auch für allg. $\underline{D}$]

„Beweis": $\underline{\nabla} \cdot (5.42) \longrightarrow \quad 0 = \mu_0 \Big(\underline{\nabla} \cdot \underline{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \underline{E}}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \Big)$

$$\longrightarrow \quad 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \checkmark$$

also: Erweiterung in Einklang mit Kont.gl. (5.6)

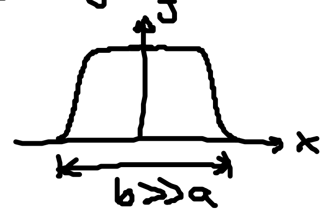
5.5.2 Einführung der Magnetisierung

- analog zu Kap. 4.1/4.2
- zu mittelnde mikroskop. Gln.:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{b} &= \mu_0 \Big(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} \Big) \\ \operatorname{div} \underline{b} &= 0 \end{aligned}} \quad (5.44)$$

- Mittelungsoperation: $F(\underline{r}, t)$ ... stark fluktuierend auf Länge a

$$\longrightarrow \quad \langle F(\underline{r}, t) \rangle = \int f(|\underline{r} - \underline{r}'|) \, F(\underline{r}', t) \, d^3 r'$$



Bsp. $\langle F_0 \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \rangle = F_0 \, f(\underline{r} - \underline{r}_0) \quad (4.3)$

- makroskopisches $\underline{B}$-Feld: $\underline{B}(\underline{r}, t) = \langle \underline{b}(\underline{r}, t) \rangle$ (5.45)
- " $\underline{E}$ - Feld: $\underline{E}(\underline{r}, t) = \langle \underline{e}(\underline{r}, t) \rangle$

- Stromdichte: $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}_f(\underline{r}, t) + \underline{j}_b(\underline{r}, t) \longrightarrow \langle \underline{j} \rangle$ (5.46)

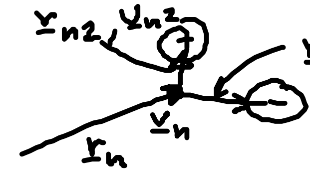
(1) „freie" Ströme:

$$\underline{j}_f(\underline{r}, t) \overset{(5.5)}{=} \sum_{i(f)} q_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschw. von } q_i}}{\underline{v}_i} \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t)) \longrightarrow \underline{j}_F = \langle \underline{j}_F \rangle \quad (5.47)$$

(2) „gebundene" Ströme:

$$\underline{j}_b(\underline{r}, t) = \sum_n \underline{j}_n(\underline{r}, t)$$

mit n-tem Molekül:



$$j_n(\underline{r},t) = \sum_{i(n)} q_i \underline{v}_i \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$$
$$= \sum_{i(n)} q_i (\underline{v}_n + \underline{v}_{ni}) \, \delta(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{ni}))$$

(3) Mittelung über Moleküle:

$$\langle j_n(\underline{r},t)\rangle \overset{(4.3)}{=} \sum_{i(n)} q_i (\underline{v}_n + \underline{v}_{ni}) f(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{ni}))$$
$$\underset{\text{um } \underline{r}_n}{\overset{\text{Taylor}}{=}} \sum_{i(n)} \underline{\underline{q_i}} (\underline{v}_n + \underline{\underline{v_{ni}}}) [f(\underline{r}-\underline{r}_n) - \underline{r_{ni}} \cdot \underline{\nabla} f(\underline{r}-\underline{r}_n) + \ldots] \quad (5.49)$$

$\longrightarrow$ Terme mit $\sum_{i(n)} q_i \underline{v}_n \ldots$ (s.u.)

$\xrightarrow{\text{mit } \underline{v}_{ni}}$ molekulare Dipolmomente

(i) elektrische: [1. Term]

$$\frac{d}{dt} \underline{p}_n = \sum_{i(n)} q_i \underline{v}_{ni} = \sum_{i(n)} q_i \frac{d\underline{r}_{ni}}{dt} \quad (5.50)$$

... zeitliche Änderung des elektr. Dipolmoments [vgl. (4.40)]

(ii) magnetische [2. Term]

$$\sum_{i(n)} q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha = \sum_{i(n)} \frac{1}{2} [q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha - q_i (\underline{r}_{ni})_\alpha (\underline{v}_{ni})_\beta]$$
$$+ \sum_{i(n)} \frac{1}{2} \underbrace{[q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha + q_i (\underline{r}_{ni})_\alpha (\underline{v}_{ni})_\beta]}_{\approx 0\text{, da Ströme auf Molekül beschränkt} \,\hat{=}\, \operatorname{div} j = 0}$$

$$= - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\underline{m}_n)_\gamma \quad (5.51)$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{m}_n = \frac{1}{2} \sum_{i(n)} q_i (\underline{r}_{ni} \times \underline{v}_{ni})} \quad (5.52)$$

... molekulares magnetisches Dipolmoment

[vgl. Gl. (5.31): $\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}) \, d^3r$]

Bew: (5.52) in (5.51) mit

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\varepsilon_{\gamma\delta\varepsilon} = \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\varepsilon} - \delta_{\alpha\varepsilon}\,\delta_{\beta\delta}$$

also

$$\langle (j_n)_\alpha \rangle = \underbrace{\sum_{i(n)} [\, q_i}_{q_n} (v_n)_\alpha + \underline{\frac{d}{dt}(p_n)_\alpha}] \underbrace{\langle \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle}_{f(\underline{r}-\underline{r}_n)}$$

$$- \Big\{ \sum_{i(n)} [\, q_i (\underline{v}_n)_\alpha (\underline{r}_{ni})_\beta - \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\underline{m}_n)_\gamma}_{(5.51)}] \Big\} \nabla_\beta f(\underline{r}-\underline{r}_n)$$

$$(p_n)_\beta$$

$$= \langle q_n (\underline{v}_n)_\alpha \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle (p_n)_\alpha \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle$$

$$+ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta \langle (\underline{m}_n)_\gamma \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle \qquad (5.53)$$

$$- \nabla_\beta \langle (\underline{v}_n)_\alpha (p_n)_\beta \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle \Big\}$$ vernachlässige im folgend [s. Jackson Kap. 6.6]

(4) $\longrightarrow$ gemittelte Stromdichte der gebundenen Ladungen:

$$\langle j_b(\underline{r},t)\rangle = \sum_n \langle j_n(\underline{r},t)\rangle$$

(5.54)

$\xrightarrow[\text{in (5.53)}]{\text{3 Terme}}$

$$\boxed{\langle j_b(\underline{r},t)\rangle = j_M(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(\underline{r},t) + \underline{\nabla}\times \underline{M}(\underline{r},t)}$$

mit makroskop. Dichten:

Stromdichte:	$j_M(\underline{r},t) =$	$\langle \sum_n q_n \underline{v}_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle$	(5.5)
Polarisation:	$\underline{P}(\underline{r},t) =$	$\langle \sum_n p_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle$	(4.13)
neu Magnetisierung:	$\underline{M}(\underline{r},t) =$	$\langle \sum_n \underline{m}_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n)\rangle$	(5.55)

- (Dichte der magnet. Dipole)