

5.4. Kleine Stromverteilungen: der magnetische Dipol

5.4.1. Felder kleiner Stromverteilungen

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') d^3 r' \quad (5.31)$$

... magnet. Dipolmoment

$$\rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{B}(\underline{r}) &= \text{rot } \underline{A} = -\nabla \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\underline{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \underline{m}}{r^3} \end{aligned} \quad (5.33)$$

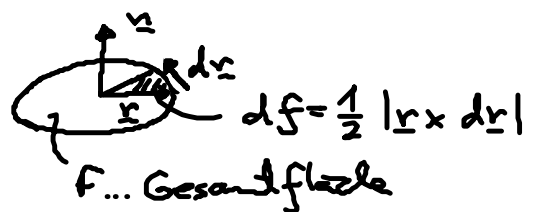
• Dipolmoment einer Stromschleife:
 $\underline{j} d^3 r = I d\underline{r} \quad (5.3)$



(i) (5.3) in (5.31): $\underline{m} = \frac{I}{2} \oint \underline{r} \times d\underline{r} \quad (5.34)$

(ii) ebene Schleife:

$$\xrightarrow{(5.34)} \underline{m} = I \underline{F}_n$$



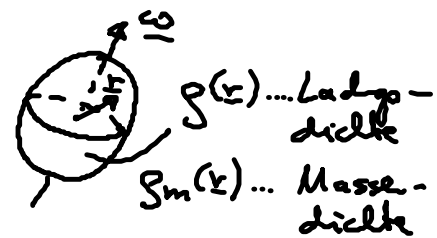
• gyro magnetisches Verhältnis: (\rightarrow Atomphysik)

(i) starrer rotierender Körper:

\rightarrow lokale Geschwindigkeit: $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$

Stromdichte: $\underline{j} = \underline{g} \underline{v}$

Impulsdichte: $\underline{g}_m \underline{v}$



$$\rightarrow \text{Dipolmoment: } \underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{g}(\underline{r}) \underline{r} \times \underline{v}(\underline{r}) d^3 r \quad (5.36)$$

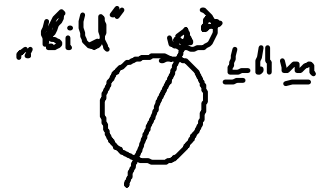
$$\text{Drehimpuls: } \underline{L} = \int \underline{g}_m(\underline{r}) \underline{r} \times \underline{v}(\underline{r}) d^3 r$$

(ii) Annahme: $\frac{p(r)}{p_m(r)} = \frac{q}{M} = \text{Gesamt} \frac{\text{Ladg}}{\text{Masse}}$

→ $\underline{m = \frac{q}{2M} L}$ (5.37)

Bsp: Bahndrehimpuls Elektron: $q = -e_0$
 $M = m_e$

(iii) Abweichung von (5.37) für Spin:
 = inhärenter Drehimpuls: Effekt von QM & RT



→ $\underline{m = g \frac{q}{2m} L}$ (5.38)

... g-/Landé-faktor

Bsp: e^- -Spin: $g \approx 2$

Proton: $g \approx 2 \times 2.79$

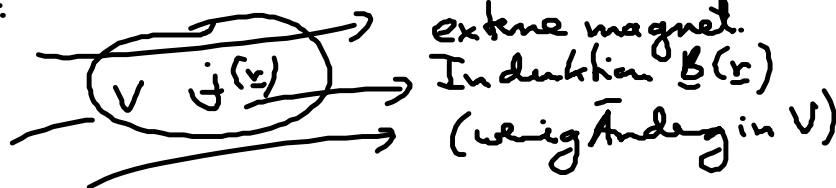
Neutron: $g \approx 2 \times (-1.91)$ (mit $q_{\text{fiktiv}} = e_0$)

- Erde = magnetischer Dipol:
 - angetrieben durch Ströme im flüssigen äußeren Erdkern
 - um 11 Grad geneigt gegen Erdachse
 - Umpolung alle 200.000 Jahre



5.4.2 Kraft, Drehmoment, & Energie

• Problemstellung:



• Kraft auf V mit $\underline{j}(\underline{r})$:

$$\text{Gl. (5.16)} \rightarrow \underline{F} = \int \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) d^3r$$

$$\text{Taylor von } \underline{B} \text{ um } \underline{r}=0 = \int \underline{j}(\underline{r}) \times [\underline{B}(0) + \underline{r} \cdot \nabla \underline{B}(0) + \dots] d^3r$$

$= 0!$ (5.23) \rightarrow magnet. Moment

wie in Kap. 5.4.1 und (5.20)

$$= \nabla (\underline{m} \cdot \underline{B}(0)) - \underline{m} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B}(0))}_{=0}$$

$$\rightarrow \underline{F} = \nabla (\underline{m} \cdot \underline{B})$$

... Dipole werden in \underline{B} hineingezogen!

• potentielle Energie: von \underline{m} in \underline{B}

$$\underline{F} = -\nabla U \rightarrow \underline{U} = -\underline{m} \cdot \underline{B} \quad (5.40)$$

NB: (i) minimiere $U \rightarrow \underline{m} \uparrow \underline{B}$ („Kompass-Prinzip“)

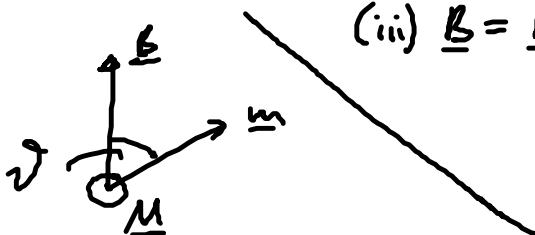
(ii) U enthält nicht Energie, um \underline{m} aufrecht zu erhalten

(iii) $\underline{B} = \underline{B}_{\text{dipol}}$ (5.33) \rightarrow

Dipol-WW-Energie: $\uparrow \underline{m}_1 \nearrow \underline{m}_2$

[vgl. (3.31) \underline{j} = elektr. Dipole]

• Drehmoment \underline{M} :



$$U = -m B \cos \vartheta \rightarrow M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -m B \sin \vartheta = -|\underline{m} \times \underline{B}|$$

dreht \underline{m} nach \underline{B}

$$\rightarrow \underline{M} = \underline{m} \times \underline{B} \quad (5.41)$$

5.5 Magnetische Felder in Materie

• magnetische Induktion $\underline{B} \leftrightarrow$ Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$

• In Materie: Behandlung analog zu Kap. 4.1/4.2

(1) freieladung: $\underline{j}_f(\underline{r}, t)$ Bsp: e^- im Metall

(2) gebundene " : $\underline{j}_b(\underline{r}, t) \leftrightarrow$ "lokalisierte Ströme"

gebundene $e^- \leftrightarrow \underline{j} \leftrightarrow \underline{m}$ (magnet. Moment)

(3) intrinsischer Spin: $\rightarrow \underline{m}$ (s. Kap. 5.4.1)

\rightarrow Ziel: gemittelte Beschreibung über Magnetisierung

• meist: Vervollständigung von $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ nötig

5.5.1 Einführung der Vakuumverschiebungstromdichte

• bis jetzt: Magnetostatik

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{B}) = \mu_0 \underline{j} \xrightarrow{(5.21)} \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = 0$$

• aber volle Kont. gl. gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \underline{j} = 0 \quad (5.5)$$

\rightarrow Verallgemeinerung von Gl. (5.21) nötig

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (5.42)$$
$$= \mu_0 \left(\underline{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right)$$

... Ampèresches Gesetz & Maxwell'sche Verallgemeinerung

mit $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$ [(Vakuum-Lichtgeschw.)]

NB: $\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$... (Vakuum-) Verschiebungstromdichte
[gilt auch für allg. \underline{D}]

„Beweis“: $\nabla \cdot (\text{S.42}) \rightarrow 0 = \mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{j} + \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E}}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \right)$

$$\rightarrow 0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \checkmark$$

also: Erweiterung in Einklang mit Kont.gl. (S.6)

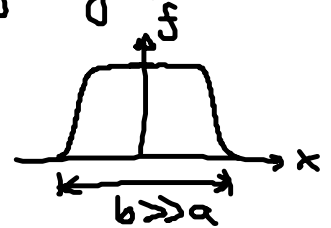
5.5.2 Einführung der Magnetisierung

- analog zu Kap. 4.1/4.2
- zu mittlere mikroskops. Gl.:

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\mathbf{b}} &= \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right) \quad (\text{S.44}) \\ \text{div } \underline{\mathbf{b}} &= 0 \end{aligned}$$

- Mittelungsoperation: $F(\mathbf{r}, t)$... stark fluktuierend auf Längens

$$\rightarrow \langle F(\mathbf{r}, t) \rangle = \int f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) F(\mathbf{r}', t) d^3 r'$$



Bsp: $\langle F_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rangle = F_0 f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.3)$

- makroskopisches $\underline{\mathbf{B}}$ -Feld: $\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \langle \underline{\mathbf{b}}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (\text{S.45})$
- „ $\underline{\mathbf{E}}$ -Feld: $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \langle \underline{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, t) \rangle$

- Stromdichte: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_F(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) \rightarrow \langle \mathbf{j} \rangle \quad (\text{S.46})$

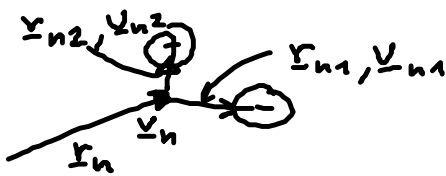
(1) „freie“ Ströme:

$$\mathbf{j}_F(\mathbf{r}, t) \stackrel{(\text{S.5})}{=} \sum_{i \in \mathcal{F}} q_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschw. von } q_i}}{\mathbf{v}_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \rightarrow \mathbf{j}_F = \langle \mathbf{j}_F \rangle \quad (\text{S.47})$$

(2) „gebundene“ Ströme:

$$\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{r}, t)$$

mit n -ten Modell:



$$j_n(\underline{r}, t) = \sum_{i(n)} q_i \underline{v}_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$= \sum_{i(n)} q_i (\underline{v}_n + \underline{v}_{ni}) \delta(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{ni}))$$

(3) Mittelwert \bar{j}_n = Molekult:

$$\langle j_n(\underline{r}, t) \rangle \stackrel{(4.3)}{=} \sum_{i(n)} q_i (\underline{v}_n + \underline{v}_{ni}) f(\underline{r} - (\underline{r}_n + \underline{r}_{ni}))$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \sum_{i(n)} q_i (\underline{v}_n + \underline{v}_{ni}) \left[f(\underline{r} - \underline{r}_n) - \underline{r}_{ni} \cdot \nabla f(\underline{r} - \underline{r}_n) + \dots \right] \quad (5.49)$$

→ Terme mit $\sum_{i(n)} q_i \underline{v}_n \dots$ (s.u.)

mit \underline{v}_{ni} molekulare Dipolmomente

(i) elektrisch: [1. Term]

$$\frac{d}{dt} p_n = \sum_{i(n)} q_i \underline{v}_{ni} = \sum_{i(n)} q_i \frac{d \underline{r}_{ni}}{dt} \quad (5.50)$$

... zeitliche Änderung des elektr. Dipolmoments
[vgl. (4.40)]

(ii) magnetisch [2. Term]

$$\sum_{i(n)} q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha = \sum_{i(n)} \frac{1}{2} [q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha - q_i (\underline{r}_{ni})_\alpha (\underline{v}_{ni})_\beta]$$

$$+ \sum_{i(n)} \frac{1}{2} [q_i (\underline{r}_{ni})_\beta (\underline{v}_{ni})_\alpha + q_i (\underline{r}_{ni})_\alpha (\underline{v}_{ni})_\beta]$$

≈ 0 , da Ströme auf Molekül beschränkt $\hat{=} \text{div } \underline{j} = 0$

$$= - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\underline{m}_n)_\gamma \quad (5.51)$$

→ $\underline{m}_n = \frac{1}{2} \sum_{i(n)} q_i (\underline{r}_{ni} \times \underline{v}_{ni}) \quad (5.52)$

... molekulares magnetisches Dipolmoment

[vgl. Gl. (5.31): $\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}) d^3r$]

Bew.: (S.52) in (S.51) mit

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\delta\varepsilon} = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\varepsilon} - \delta_{\alpha\varepsilon} \delta_{\beta\delta}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \langle (j_n)_\alpha \rangle &= \sum_{i(n)} \underbrace{[q_i (\underline{v}_n)_\alpha + \frac{d}{dt} (p_n)_\alpha]}_{\underline{q}_n} \underbrace{\langle \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle}_{f(\underline{r}-\underline{r}_n)} \\ &\quad - \underbrace{\nabla_\beta}_{(p_n)_\beta} \underbrace{\langle [q_i (\underline{v}_n)_\alpha (\underline{r}_{ni})_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (m_n)_\gamma]}_{(S.51)} \underbrace{\nabla_\beta}_{i} f(\underline{r}-\underline{r}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle q_n (\underline{v}_n)_\alpha \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle (p_n)_\alpha \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle \\ &\quad + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta \langle (m_n)_\gamma \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle \end{aligned} \quad (S.53)$$

$-\nabla_\beta \langle (\underline{v}_n)_\alpha (p_n)_\beta \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle$ } vernachlässige im
folgend [s. Jackson Kap. 6.5]

(4) → gemittelte Stromdichte der gebundenen Ladgen:

$$\langle j_b(\underline{r}, t) \rangle = \sum_n \langle j_n(\underline{r}, t) \rangle$$

(S.54)

3 Terme
in (S.53)

$$\langle j_b(\underline{r}, t) \rangle = j_n(\underline{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r}, t) + \nabla \times \underline{M}(\underline{r}, t)$$

mit makroskop. Dichten:

$$\text{Stromdichte: } j_n(\underline{r}, t) = \langle \sum_n q_n \underline{v}_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle \quad (S.5)$$

$$\text{Polarisation: } \underline{P}(\underline{r}, t) = \langle \sum_n p_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle \quad (4.13)$$

$$\text{neu Magnetisierung: } \underline{M}(\underline{r}, t) = \langle \sum_n \underline{m}_n \delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \rangle \quad (S.55)$$

(Dichte der magnet. Dipole)