

## 5.5.2 Einführung der Magnetisierung

$$\operatorname{rot} \underline{b} = \mu_0 \left( \underline{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} \right) \quad (5.44)$$

$$\operatorname{div} \underline{b} = 0$$

$\langle \underline{j} \rangle$  ?

$$\langle \underline{j}_b \rangle = \underline{j}_M(\underline{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r}, t) + \nabla \times \underline{M}(\underline{r}, t) \quad (5.54)$$

.... Stromdichte der gebundenen Ladungen

mit makroskop. Dichten:

$$\text{Stromdichte: } \underline{j}_M(\underline{r}, t) = \left\langle \sum_n q_n \underline{v}_n \delta(\underline{r} - \underline{r}_n) \right\rangle \quad (5.5)$$

$$\text{Polarisation: } \underline{P}(\underline{r}, t) = \left\langle \sum_n \underline{p}_n \delta(\underline{r} - \underline{r}_n) \right\rangle \quad (4.13)$$

$$\text{Magnetisierung: } \underline{M}(\underline{r}, t) = \left\langle \sum_n \underline{m}_n \delta(\underline{r} - \underline{r}_n) \right\rangle \quad (5.55)$$

(5) gemittelte mikroskop. Stromdichte:

$$\begin{aligned} \langle \underline{j}(\underline{r}, t) \rangle &\stackrel{(5.46)}{=} \langle \underline{j}_F(\underline{r}, t) \rangle + \langle \underline{j}_b(\underline{r}, t) \rangle \\ &\stackrel{(5.47)}{=} \underbrace{\langle \underline{j}_F(\underline{r}, t) + \underline{j}_M(\underline{r}, t) \rangle}_{\underline{j}_{Ma}(\underline{r}, t)} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r}, t) + \nabla \times \underline{M}(\underline{r}, t) \right\rangle}_{\underline{j}_{Mb}(\underline{r}, t)} \end{aligned} \quad (5.56)$$

• makroskop. Feldgleichungen:  $\langle \mathbf{E} \rangle$  (S.44)

$$\rightarrow \langle \text{rot } \underline{\mathbf{b}} \rangle = \mu_0 (\langle \mathbf{j} \rangle + \epsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t}) \quad \& \quad \langle \text{div } \underline{\mathbf{b}} \rangle = 0 \quad (\text{S.57})$$

(S.45)  $\rightarrow$   
 $\underline{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{P}}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\mathbf{B}} &= \mu_0 [ \mathbf{j}_{Ma}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{Mi}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} ] \\ &= \mu_0 [ \mathbf{j}_{Ma}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \times \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) ] \quad (\text{S.58}) \\ \text{div } \underline{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned}$$

• Führe ein: magnetisches (Magnet-) Feld

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) - \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{S.59}) \\ \Leftrightarrow \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 [ \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) ] \end{aligned}$$

NB: Magnetisierung wird in Hilfsfeld  $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)$  gesteckt  
 $\rightarrow$  Materialgesetze nötig

also:

$$\begin{aligned} (\text{S.58}) \rightarrow \text{rot } \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{j}_{Ma}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{S.60}) \\ \text{div } \underline{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned}$$

NB: (i) Die Wirbel von  $\underline{\mathbf{H}}$  sind makroskop. Stromdichte und der dielekt. Verschiebestrom  $\frac{\partial \underline{\mathbf{D}}}{\partial t}$

(ii)  $\underline{\mathbf{B}}$  ist das fundamentale Feld!

(iii) Merke (S.60)

und im Vakuum:  $\underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \underline{\mathbf{H}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \underline{\mathbf{E}}$

### 5.5.3 Materialgesetze & Randbedingungen

• lineare Materialgesetze:

(i) anisotrop:  $M_i(\mathbf{H}) = \chi_{mij} H_j \quad (\text{S.61})$

$\underline{\chi}_m \dots$  Tensor der magnet. Suszeptibilität

NB.: (i)  $\underline{M} = \underline{M}(\underline{H})$ , nicht  $\underline{M} = \underline{M}(\underline{B})$   
↑ Hilfsfeld ↑ für kein magnetisches Feld

vgl.  $\underline{P} = \underline{P}(\underline{E})!$

(ii)  $\underline{M} \parallel \underline{H}$

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \underline{\mu} \underline{H}$$

mit  $\underline{\mu} = \mu_0 (1 + \underline{\chi}_m)$

(5.62)

... Tensor der magnet. Permeabilität

(ii) isotrop:

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \& \quad \underline{B} = \mu \underline{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H}$$

(5.63)

relative Permeabilität:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \quad \& \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

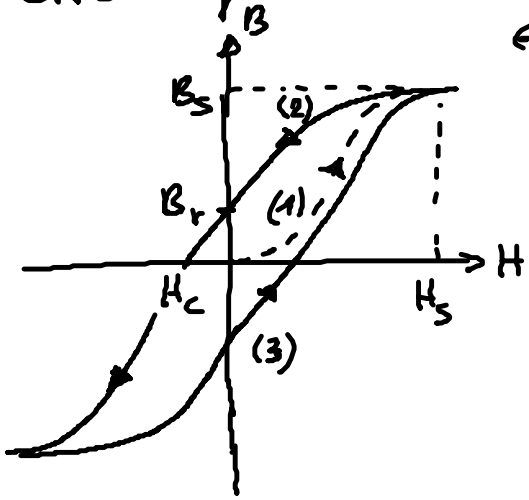
(5.64)

NB. (1)  $|\mu_r - 1| \approx 10^{-6}$

(2)  $\mu_r > 1$ : Paramagnetismus:  $\underline{M} \parallel \underline{H}$   
 $\chi_m > 0$  Ausrichtung von atomaren/molekularen magnet. Momenten  $\underline{m}$

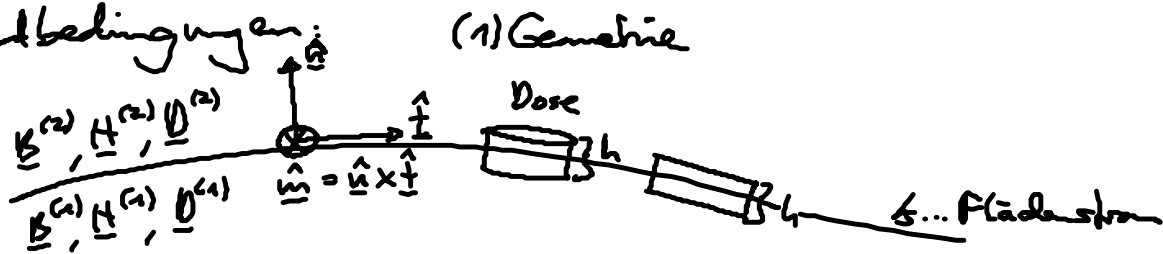
(3)  $\mu_r < 1$ : Diamagnetismus:  $\underline{M} \perp \underline{H}$   
 $\chi_m < 0$  Induktion von atomaren/molekularen Ringströme  $\rightarrow \underline{m} \perp \underline{H}$

• Ferro magnetismus: nichtlineare Zusammenhang  $\underline{B} = \underline{B}(\underline{H})$   
 $\longleftrightarrow$  Hysteresis



- (1) Neutkurve für magnet. Material  
 $H_s$  ... Sättigungsfeldstärke  
 $B_s$  ... " wert von  $B$
- (2)  $H \downarrow \rightarrow B_r = B_r(H=0)$   
 ... Remanenzfeldstärke  
 $H_c$  ... Koerzitivkraft, wo  $B=0$
- (3) Umkehrung: (3)  $\neq$  (1)  
 $\longleftrightarrow$  Hysteresis

• Randbedingungen:



(2) Normalkomp. von  $\underline{B}$ : stetig!

$$\text{div } \underline{B} = 0 \xrightarrow{\text{Dose}} \int \text{div } \underline{B} d^3x = \int \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(1)}) = 0 \iff B_{\perp}^{(2)} = B_{\perp}^{(1)}$$

(S.65)

(3) Tangentialkomp. von  $\underline{H}$ :

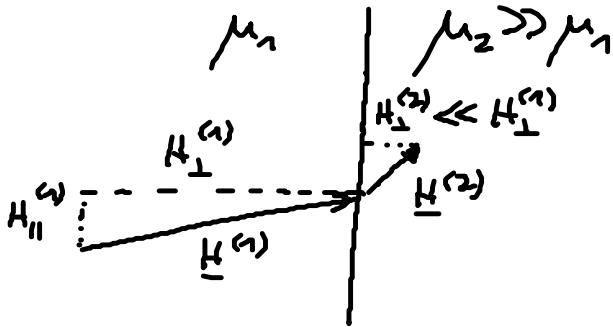
$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Schleife}} \int \text{rot } \underline{H} \cdot d\underline{f} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int (\underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}) \cdot \hat{n} d\underline{f}$$

$$h \rightarrow 0 \rightarrow \hat{t} \cdot (\underline{H}^{(2)} - \underline{H}^{(1)}) = H_{\parallel}^{(2)} - H_{\parallel}^{(1)} = k \cdot \hat{m} \quad (\text{S.66})$$

(4) insbes. lineares, isotropes Material:  $\underline{B} = \mu \underline{H}$

$$\mu_1 H_{\perp}^{(1)} = \mu_2 H_{\perp}^{(2)} \quad (\text{S.67})$$

Material mit  $\mu_2 \gg \mu_1$  ( $k=0$ )



$\mu_2 \rightarrow \infty: H_{||}^{(2)} \approx 0, H_{\perp}^{(2)} \perp \text{ Grenzfläche}$

$\rightarrow$  Region 2 verhält sich wie elektr. Leiter, Oberfläche ist Äquipotentialfläche (s.u.)

### 5.5.4 Magnetische Skalarpotentiale & Anwendungen

• Magnetostatik:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \& \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j} \quad (5.60)$$

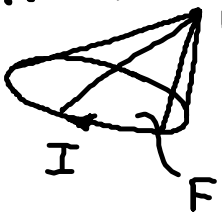
• homogenes, lineares Medium:  $\& \underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{H} = -\underline{\nabla} \phi_M \quad (5.61)$$

$$\text{mit } \underline{\mu} \underline{H} = \underline{B} \text{ in } \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{\nabla}^2 \phi_M = 0 \quad (5.62)$$

$\phi_M \dots$  magnet. Skalarpotential

Bsp. Stromschleife:



Es gilt:

$$\phi_M = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega$$

$\Omega \dots$  Raumwinkel von F bezogen auf P

Beweis: s. Übung

• harter Ferromagnet:  $\underline{M}$  vorgegeben  $\& \underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} \stackrel{(5.59)}{=} \mu_0 \underline{\nabla} \cdot (\underline{H} + \underline{M}) = 0 \quad \& \quad \underline{H} = -\underline{\nabla} \phi_M$$

$$\underline{\nabla}^2 \phi_M = -g_M \quad \text{mit } g_M = -\underline{\nabla} \cdot \underline{M} \quad (5.70)$$

$\dots$  effektive magnet Ladungsdichte

Lösung:

(i) ohne Randflächen.

$$\Phi_m(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' \quad (5.71)$$