

5.7 Energie des magnet. Feldes & Induktivität

5.7.1 Energie eines statischen Magnetfeldes

• Energie von statischem $\underline{B}(\underline{r})$

= Energie zum Aufbau des Feldes bei Einschalten von Strom $I(t)$ / Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}, t)$

Einschalten von $I/j \rightarrow \underline{B} \rightarrow \underline{E}$

\rightarrow Arbeit pro Zeit um $I = \frac{dq}{dt}$ / j zu halten:

$$\frac{dU}{dt} = -I \int_C \underline{E} \cdot d\underline{r} = \frac{\text{Kraft} \cdot d\underline{r}}{dt} \quad (5.88)$$

Beachte: Kraft auf q im Leiter: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underbrace{\underline{v} \times \underline{B}}_{\perp d\underline{r} \parallel C!})$
Geschw. von q $\perp d\underline{r}$

mit (5.82) $\frac{dU}{dt} = I \frac{d}{dt} \int \underline{B} \cdot d\underline{f} \quad (5.89)$

\rightarrow kein Beitrag zu $\frac{dU}{dt}$

(1) Energiezunahme durch $\delta \underline{B}$:

$$\delta U = I \int \delta \underline{B} \cdot d\underline{f} \stackrel{\underline{B} = \text{rot} \underline{A}}{=} I \int \text{rot} \delta \underline{A} \cdot d\underline{f}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} I \int \delta \underline{A} \cdot d\underline{r}$$

$$\int d\underline{r} = \int d^3r$$

Kontinuitätsgleichung

$$\text{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

in End-/Anfangswert $\underline{D} = 0! \rightarrow$ weglassen

$$\begin{aligned}
 &= \int (\nabla \times \underline{H}) \cdot \underline{SA} \, d^3r \\
 &= \underbrace{\nabla \cdot (\underline{H} \times \underline{SA})}_{\text{Oberflächent} = 0} + \underline{H} \cdot \underbrace{(\nabla \times \underline{SA})}_{\underline{SB}}
 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{SU} = \int \underline{H} \cdot \underline{SB} \, d^3r} \quad (5.30)$$

NB. vgl. Dielektrikum: $\underline{SU}_{el} = \int \underline{E} \cdot \underline{SD} \, d^3r$! (4.41)

(2) lineares Material: $\underline{B} = \underline{\mu H} \longrightarrow \underline{H} \cdot \underline{SB} = \frac{1}{2} \underline{S}(\underline{H} \cdot \underline{B})$

$$\frac{\int \underline{S}(\underline{H} \cdot \underline{B})}{= \underline{H} \cdot \underline{B}} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \int \underline{H} \cdot \underline{B} \, d^3r = \frac{1}{2} \int \underline{j} \cdot \underline{A} \, d^3r} \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} \int \underline{H} \cdot \text{rot} \underline{A} \, d^3r \stackrel{\text{part. Integ.}}{=} \frac{1}{2} \int \underline{A} \cdot \underbrace{\text{rot} \underline{H}}_{\underline{j}} \, d^3r$$

NB. vgl. lineares Dielektrikum:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int \underline{E} \cdot \underline{D} \, d^3r = \frac{1}{2} \int \rho(\underline{r}) \Phi(\underline{r}) \, d^3r \quad (4.42)$$

(3) alternative Form: im linearen Material (stationär)

$$\left. \begin{aligned} \underline{B} &= \text{rot} \underline{A} \\ \text{rot} \underline{H} &= \underline{j} \\ \underline{B} &= \underline{\mu H} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \underline{A} &= -\underline{\mu j} \\ \Leftrightarrow \underline{A} &= \frac{\underline{\mu}}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, d^3r' \end{aligned}} \quad (5.32)$$

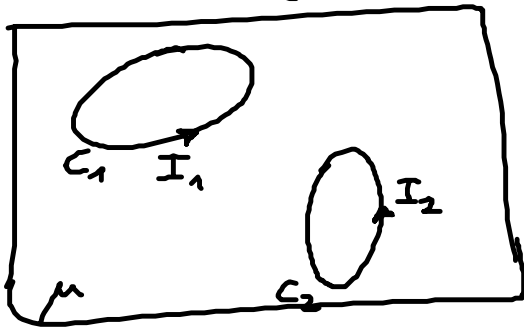
NB. Gl. (5.13) & (5.25), aber im Material mit μ !

$$\xrightarrow{\text{in (5.31)}} \boxed{U = \frac{\underline{\mu}}{8\pi} \int d^3r \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \quad (5.33)$$

NB. vgl. Dielektrikum: $\underline{j}(\underline{r}) \rightarrow \rho(\underline{r})$

5.7.2 Induktivität

• Problemstellung:



wechselwirkende Leiterschleifen
im linearen Material

• Feldenergie:

Gl. (S.93): $U \sim \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ (verteilt auf Leiterschleifen)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k \quad (S.94)$$

mit Selbstinduktivität:

$$L_{ii} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i^2} \iint d^3r d^3r' \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (S.95)$$

Gegeninduktivität: $i \neq k \quad \mathbf{j}_i d^2r = I_i d\mathbf{r}_i$

$$L_{ik} = L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{C_i C_k} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (S.96)$$

NB: (1) L_{ii} muß mit $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ berechnet werden! (s.u.)

(2) L_{ik} ... geometrische Größen

• Selbstinduktivität \leftrightarrow magnetischer Fluß \leftrightarrow Ringspannung

$$\begin{aligned} (i) \quad \Phi_B &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int \text{rot } \underline{A} \cdot d\mathbf{f} \\ &= \oint \underline{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} I \oint_{\partial F} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \end{aligned}$$



$$\rightarrow \boxed{\Phi_B = L I} \quad (S.97)$$

mit $L = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I} \oint_{\partial F} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$

(ii) Ringspannung entlang Leiterschleife:

$$V = \oint \underline{E} \cdot d\underline{r} \stackrel{(5.22)}{=} - \frac{d}{dt} \Phi_B$$

$$\rightarrow \boxed{V = -L \frac{d}{dt} I} \quad (5.98)$$

NB: Anwendung in elektromagnet. Schwingkreis!

[s. Ex. phys.]

→ quasistationär $\hat{=}$
keine Abstrahlung von Energie

(iii) Verallgemeinerung auf System von Leiterschleifen:

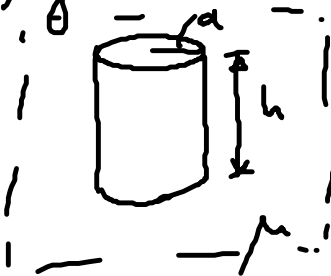
Ringspannung von Schleife i:
$$V_i = \oint_{C_i} \underline{E} \cdot d\underline{r}_i = - \sum_k L_{ik} \frac{d}{dt} I_k \quad (5.93)$$

Strom in Schleife k

Beweis: selber

Anwendungen:

(i) gerader Draht:



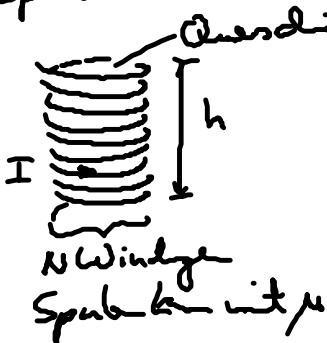
homogenes \underline{j} im Draht

$$\stackrel{(5.25)}{\rightarrow} \boxed{L = \frac{\mu}{2\pi} h \left(\ln \frac{2h}{a} - \frac{3}{4} \right)}$$

Beweis: Übung

NB: Radius des Leiters nicht auf!

(ii) Spule: unendlich lang



(1) Magnetfeld im Inneren

$$\stackrel{(5.26)}{\rightarrow} H = \frac{N}{h} I \quad (5.101)$$

$$(2) \boxed{U = \frac{1}{2} L I^2 \text{ mit } L = \mu N^2 \frac{A}{h}}$$

Beweis:

$$U = \frac{1}{2} H B V$$

$$= \frac{1}{2} \mu H^2 A h = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 I^2}{h} A \text{ gel}$$

6. Grundgleichungen der Elektrodynamik

6.1 Die Maxwell'schen Gleichungen: Zusammenstellung

- Bestimmen die „Dynamik“ elektr. & magnet. Felder
= elektromagnetischer (em) Felder
- im Vakuum & Materie: alle Felder von \underline{r}, t abhängig

(6.1)	$\operatorname{div} \underline{D} = \rho$...	Gaußsches Gesetz
	$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$...	Faradaysches Induktionsgesetz
	$\operatorname{div} \underline{B} = 0$...	keine magnetischen Monopole
	$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$...	Ampèresches Gesetz mit Maxwell'schem Verschiebungsstrom

... Quelle und Wirbel elektr./magnet. Felder!

$\rho(\underline{r}, t)$... makroskop. Ladungsdichte
 $\underline{j}(\underline{r}, t)$... " Stromdichte

Merke!

- Kraft dichte auf ρ, \underline{j}

$$\underline{f}(\underline{r}, t) = \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B} \quad (6.2)$$

NB: Kontinuitätsform der Lorentzkraft
 $[\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})]$

Kontinuitätsgl. $\rho =$ Ladung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0 \quad (6.3)$$