5.7 Energie des magnet. Feldes & Induktivität

5.7.1 Energie eines statischen Magnetfeldes

- Energie von statischem $\underline{B}(\underline{r})$
  = Energie zum Aufbau des Feldes bei Einschalten
  von Strom $I(t)$ / Stromdichte $\underline{j}(\underline{r},t)$

Einschalten von $I/\underline{j} \longrightarrow \dot{\underline{B}} \longrightarrow \underline{E}$

$\longrightarrow$ Arbeit pro Zeit um $I = \frac{dq}{dt}$ / $\underline{j}$ zu halten:

$$\frac{dU}{dt} = -I\int_C \underline{E}\cdot d\underline{r} = \frac{\text{Kraft}\cdot d\underline{r}}{dt} \quad (5.88)$$

Beachte: Kraft auf q im Leiter: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underbrace{\underline{v}\times\underline{B}}_{\perp d\underline{r} \parallel C\,!})$

Geschw. von q $\parallel d\underline{r}$

$\longrightarrow$ kein Beitrag zu $\frac{dU}{dt}$

$$\xrightarrow[(5.82)]{\text{mit}} \quad \frac{dU}{dt} = I\frac{d}{dt}\int \underline{B}\cdot d\underline{f} \quad (5.89)$$

(1) Energiezunahme durch $\delta\underline{B}$:

$$\delta U = I\int \delta\underline{B}\cdot d\underline{f} \overset{\underline{B}=\text{rot}\,\underline{A}}{=} I\int \text{rot}\,\delta\underline{A}\cdot d\underline{f}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} I\int \delta\underline{A}\cdot d\underline{r}$$

$I\,d\underline{r} = \underline{j}\,d^3r$ $\quad \underset{\text{übergg}}{\overset{\text{Kontinuums}}{=}} \int \underline{j}\cdot\delta\underline{A}\,d^3r$

$$\underline{j} = \text{rot}\,\underline{H} - \underbrace{\frac{\partial\underline{D}}{\partial t}}_{}$$

im End-/Anfgszustd $\dot{\underline{D}} = 0\,! \rightarrow$ weglassen

$$= \int \underbrace{(\nabla \times \underline{H}) \cdot \delta \underline{A}}\, d^3r$$

$$= \underbrace{\nabla \cdot (\underline{H} \times \delta \underline{A})}_{\text{Oberflächenterm} = 0} + \underline{H} \cdot \underbrace{(\nabla \times \delta \underline{A})}_{\delta \underline{B}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\delta U = \int \underline{H} \cdot \delta \underline{B}\, d^3r} \qquad (5.90)$$

NB: vgl. Dielektrikum: $\delta U_{el} = \int \underline{E} \cdot \delta \underline{D}\, d^3r$! (4.41)

(2) lineares Material: $\underline{B} = \mu \underline{H} \longrightarrow \underline{H} \cdot \delta \underline{B} = \frac{1}{2}\, \delta(\underline{H} \cdot \underline{B})$

$$\xrightarrow[= \underline{H}\cdot\underline{B}]{\int \delta(\underline{H}\cdot\underline{B})} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} \int \underline{H} \cdot \underline{B}\, d^3r = \frac{1}{2} \int \underline{j} \cdot \underline{A}\, d^3r} \qquad (5.91)$$

$$= \frac{1}{2} \int \underline{H} \cdot \mathrm{rot}\, \underline{A}\, d^3r \stackrel{\text{part. Integ.}}{=} \frac{1}{2} \int \underline{A} \cdot \underbrace{\mathrm{rot}\, \underline{H}}_{\underline{j}}\, d^3r$$

NB: vgl. lineare Dielektrikum:

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int \underline{E} \cdot \underline{D}\, d^3r = \frac{1}{2} \int \rho(\underline{r})\, \phi(\underline{r})\, d^3r \qquad (4.42)$$

(3) alternative Form: im linearen Material (stationär)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{B} = \mathrm{rot}\, \underline{A} \\ \mathrm{rot}\, \underline{H} = \underline{j} \\ \underline{B} = \mu \underline{H} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \nabla^2 \underline{A} = -\mu \underline{j} \\ \longleftrightarrow \; \underline{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}\, d^3r' \end{array}} \qquad (5.92)$$

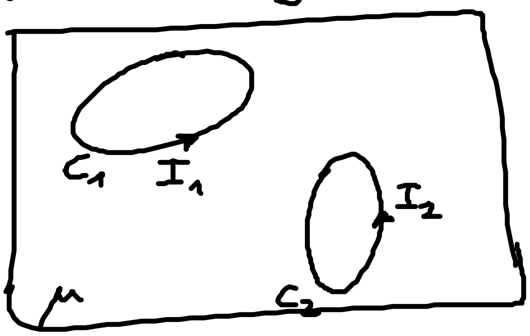
NB: Gl. (5.19) & (5.25), aber im Material mit μ!

$$\xrightarrow{\text{in } (5.91)} \quad \boxed{U = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3r \int d^3r'\, \frac{\underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}} \qquad (5.93)$$

NB: vgl. Dielektrikum: $\underline{j}(\underline{r}) \longrightarrow \rho(\underline{r})$

5.7.2 Induktivität

• Problemstellung:



wechselwirkende Leiterschleifen im linearen Material

• Feldenergie:

Gl. (5.93): $U \sim \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ (verteilt auf Leiterschleifen)

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k} \quad (5.94)$$

mit Selbstinduktivität:

$$L_{ii} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i^2} \iint d^3r\, d^3r' \, \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (5.95)$$

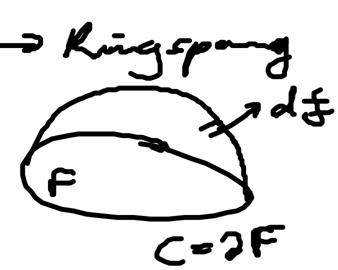
Gegeninduktivität: $i \neq k$ $\quad \mathbf{j}_i \, d^3r = I_i \, d\mathbf{r}_i$

$$L_{ik} = L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_{C_i C_k} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (5.96)$$

NB: (1) L_{ii} muß mit $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ berechnet werden! (s.u.)

(2) L_{ik} ... geometrische Größen

• Selbstinduktivität $\longleftrightarrow$ magnetischer Fluß $\longleftrightarrow$ Ringspannung



(i) $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}$

$$= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} I \oint_{\partial F} \int_F \frac{1}{I} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r'$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\Phi_B = L I \\ &\text{mit } L = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I} \oint_{\partial F} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3r' \end{aligned}} \quad (5.97)$$

(ii) Ringspannung entlang Leiterschleife:

$$V = \oint \underline{E} \cdot d\underline{r} \overset{(5.92)}{=} -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

$$\longrightarrow \boxed{V = -L \frac{d}{dt} I} \quad (5.98)$$

NB: Anwendung in elektromagnet. Schwingkreis! [s. Ex.phys.]
→ quasistationär ≙ keine Abstrahlung von Energie

(iii) Verallgemeinerung auf System von Leiterschleifen:

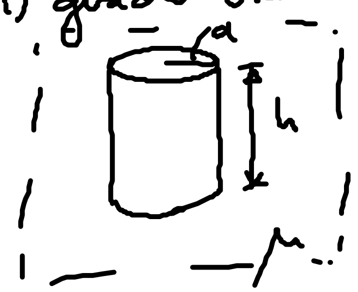
Ringspannung von Schleife i:
$$\boxed{V_i = \oint_{C_i} \underline{E} \cdot d\underline{r}_i = -\sum_k L_{ik} \frac{d}{dt} I_k} \quad (5.99)$$

Strom in Schleife k

Beweis: selber

· Anwendungen:

(i) gerader Draht:



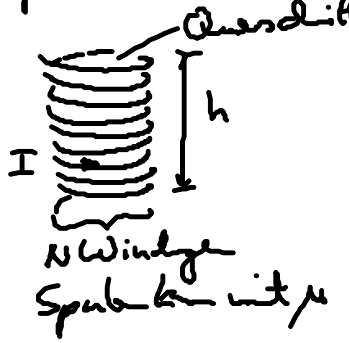
homogenes $\underline{j}$ im Draht

$$\xrightarrow{(5.35)} \boxed{L = \frac{\mu}{2\pi} h \left(\ln \frac{2h}{a} - \frac{3}{4}\right)}$$

Beweis: Übung

NB: Radius des Leiters taucht auf!

(ii) Spule: unendlich lang



(1) Magnetfeld im Innern

$$\xrightarrow{(5.26)} H = \frac{N}{h} I \quad (5.101)$$

(2) $\boxed{U = \frac{1}{2} L I^2 \text{ mit } L = \mu N^2 \frac{A}{h}}$

Beweis:
$$U = \frac{1}{2} H B V$$
$$= \frac{1}{2} \mu H^2 A h = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 I^2}{h} A \text{ qed}$$

6. Grundgleichungen der Elektrodynamik

6.1 Die Maxwellschen Gleichungen: Zusammenstellung

- Bestimmen die „Dynamik" elektr. & magnet. Felder
  = elektromagnetischer (em) Felder
- im Vakuum & Materie: alle Felder von $\underline{r}, t$ abhängig

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{H} &= \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \end{aligned}} \tag{6.1}$$

.... Gaußsches Gesetz
.... Faradaysches Induktionsgesetz
... keine magnetischen Monopole
... Ampèresches Gesetz mit Maxwellschem Verschiebungsstrom

... Quellen und Wirbel elektr./magnet. Felder!

$\rho(\underline{r}, t)$ ... makroskop. Ladungsdichte
$\underline{j}(\underline{r}, t)$ ... " Stromdichte

Merke!

- Kraftdichte auf $\rho, \underline{j}$

$$\boxed{\underline{f}(\underline{r}, t) = \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}} \tag{6.2}$$

NB: Kontinuumsform der Lorentzkraft
$[\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})]$

Kontinuitätsgl. $\hat{=}$ Ladung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0} \tag{6.3}$$