6.1 Die Maxwellsche Gleichungen: Zusammenstellung

- Materie & Vakuum:

$$(6.1)\quad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{D} &= \rho \\ \mathrm{rot}\,\underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\underline{H} &= \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Kraftdichte: $\boxed{\underline{f}(\underline{r},t) = \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}}$ (6.2)

Kont.gl. f. Ladg: $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0}$ (6.3)

- im Vakuum: $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$ & $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ in (6.1)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}\,\underline{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \mathrm{rot}\,\underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 & \mathrm{rot}\,\underline{B} &= \mu_0\left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{E}\right) \\ & & &= \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{aligned}} \quad (6.4)$$

- mikroskop. Maxwellglн.:

(6.4) gültig mit mikroskop. Feldern: $\underline{e}(\underline{r},t)$, $\underline{b}(\underline{r},t)$, $\tilde{\rho}(\underline{r},t)$, $\tilde{\underline{j}}(\underline{r},t)$

- in Materie: Mittelung über stark fluktt. Felder!

$$\underline{E} = \langle \underline{e} \rangle, \qquad \underline{B} = \langle \underline{b} \rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle\tilde{\rho}\rangle &= \rho - \underline{\nabla}\cdot\underline{P} + \nabla_k\nabla_l Q_{kl} + \dots \\ \langle\tilde{\underline{j}}\rangle &= \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{P} + \underline{\nabla}\times\underline{M} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4.15) \\ &(5.56) \end{aligned}$$

→ dielektr. Verschiebungsfeld, Magnetfeld $\underline{H}$: (6.6)

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{D} &= \varepsilon_0\underline{E} + \underline{P} - \cancel{\underline{\nabla}\underline{\underline{Q}}} \\ \underline{B} &= \mu_0(\underline{H} + \underline{M}) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4.16) \\ &(5.59) \end{aligned}$$

· lineare Materialgesetze:

$$\underline{P} = \varepsilon_0\underline{\underline{\chi}}_e\underline{E} \longrightarrow \underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{E} \quad \text{mit } \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_0\underbrace{(1 + \underline{\underline{\chi}}_e)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}_r}$$

$$\underline{M} = \underline{\underline{\chi}}_m\underline{H} \longrightarrow \underline{B} = \underline{\underline{\mu}}\,\underline{H} \quad \text{mit } \underline{\underline{\mu}} = \mu_0\underbrace{(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\chi}}_m)}_{\underline{\underline{\mu}}_r} \qquad (6.7)$$

· alternative Form: (6.1) ⟶

$$\underbrace{\begin{aligned} \operatorname{div}\underline{D} &= \rho \\ \operatorname{rot}\underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} &= \underline{j} \end{aligned}}_{\substack{\text{inhomogene Gln.} \\ \text{für } \underline{D} \text{ und } \underline{H}}} \qquad \underbrace{\begin{aligned} \operatorname{rot}\underline{E} + \frac{\partial\underline{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\underline{B} &= 0 \end{aligned}}_{\substack{\text{homogene Gln.} \\ \text{für } \underline{E},\, \underline{B}}} \qquad (6.8)$$

6.2 Elektromagnetische Potentiale

· allgemeine Lösungsstrategie

· Löse homogene Maxwellgln.:

$$\operatorname{div}\underline{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\underline{E} = -\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$$

$$\to \operatorname{rot}\underbrace{\left(\underline{E} + \frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right)}_{-\underline{\nabla}\varphi} = 0$$

(6.9)

$$\boxed{\begin{aligned} &\longrightarrow \underline{B}(\underline{r},t) = \operatorname{rot}\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r},t) \\ &\longrightarrow \underline{E}(\underline{r},t) = -\underline{\nabla}\varphi(\underline{r},t) - \frac{\partial\underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

$\underline{A}(\underline{r},t)$ ... Vektorpotential
$\varphi(\underline{r},t)$ ... skalares Potential

- Bestimmungsgleichungen für $\underline{A}, \varphi$: im Vakuum!

(6.9) in inhomogen Gln. von (6.4):

$$\xrightarrow[\left[\operatorname{div}\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right]]{} \quad \boxed{\underline{\nabla}^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \qquad (6.10)$$

$$\xrightarrow[\left[\operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right]]{} \quad \underline{\nabla}\times\underline{B} = \underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \nabla^2\underline{A}} = \frac{1}{c^2}\left(-\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A}\right) + \mu_0 \underline{j}$$

$$\longrightarrow \boxed{\nabla^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \underline{j}} \qquad (6.11)$$

4 gekoppelte partielle DGl. für $\underline{A}, \varphi$! [statt 8 $f = \underline{E}, \underline{B}$]

NB: $$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \underline{\nabla}^2 \qquad (6.12)$$

... D'Alembert/Wellenoperator ⟶

c ... (Licht-)geschwindigkeit aus Dimensionsgründen

- Eichtransformation: $\varphi, \underline{A}$ in (6.9) nicht eindeutig

⟶ Umeichung: $$\boxed{\begin{aligned}\hat{\underline{A}} &= \underline{A} + \underline{\nabla}\lambda \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\end{aligned}} \qquad (6.13)$$

mit $\lambda(\underline{r}, t)$ ... beliebige skalare Eich-Funktion

alle $\tilde{A}, \tilde{\varphi}$ lassen physikal. Felder $\underline{E}, \underline{B}$ in (6.9) unverändert!

= Eichinvarianz

6.2.1 Lorenz-Eichung

- Wähle $\underline{A}, \varphi$ so, daß

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0} \qquad (6.14)$$

... Lorenz-Eichung

$$\boxed{\begin{aligned} &\xrightarrow{(6.11)} \quad \nabla^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \longleftrightarrow \Box\underline{A} = \mu_0 \underline{j} \\ &\xrightarrow{(6.10)} \quad \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \longleftrightarrow \Box\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \end{aligned}} \qquad (6.15)$$

... inhomogene Wellengln. für $\varphi, \underline{A}$

NB: (1) φ & $\underline{A}$ sind entkoppelt

(2) (6.15) äquivalent zu Maxwell-Gln. im Vakuum

- Gilt (6.14) immer?

  $\tilde{A}, \tilde{\varphi}$ in (6.13) erfülle (6.14) nicht $\longrightarrow$

  Bestimmungsgl. $f = \lambda$ damit (6.14) erfüllt ist:

$$\xrightarrow[\text{in (6.14)}]{\underline{(6.13)}} \quad \nabla^2\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\lambda = -\left(\nabla\cdot\tilde{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}\right)! \qquad (6.16)$$

- Lorenzeichung nicht eindeutig:

  Umeichung von $\underline{A}, \varphi$ mit λ mit $\nabla^2\lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda = 0$ (6.17)

  möglich

- **Bem.:** (6.14) ist invariant unter Lorentztrafos der SRT!

6.22 Coulomb-Eichung

- Wähle $\underline{A}$ so, daß: $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0}$ (6.18)

$$\xrightarrow{\underline{(6.10)}} \quad \boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \longleftrightarrow \varphi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}d^3r'} \qquad (6.19)$$

… Coulomb-Potential von ρ!

$\longleftrightarrow$ Coulomb-Eichung

$$\xrightarrow{\underline{(6.11)}} \quad \boxed{\nabla^2\underline{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = -\mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2}\underline{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\mu_0\, \underline{j}_t} \qquad (6.20)$$

mit $\underline{\underline{j}_t = \frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\times\int\frac{\text{rot}\,\underline{j}(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}d^3r'}$

… transversale Anteil der Stromdichte mit $\text{div}\,\underline{j}_t = 0$!

Beweis: Übungen

Wellen von $\underline{A}$ wegen $\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = 0$ sind transversal [s. Kap. 2.3.4]

$\longrightarrow$ transversale / Strahlungs-Eichung

$\underline{A}$ bestimmt Wellenausbreitung

φ „statisch"

- Anwendung: in der QED!
  Photonen rein durch die Quantisierung von $\underline{A}$ bestimmt

6.3 Erhaltungssätze der Elektrodynamik

6.3.1 Erhaltung von Energie: Poyntingscher Satz

- Leistungsdichte von $\underline{E}$, $\underline{B}$-Felder:

Erinnerung: Kraftdichte: $\underline{f}(\underline{r},t) = \rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}$

mit $\underline{j} = \rho\underline{v}$ … Geschw. der Ladungsdichte

$$\longrightarrow \boxed{\underline{f}\cdot\underline{v} = \underline{j}\cdot\underline{E}}$$

… Joulesche Wärme bzw mechan. Arbeit
= pro Volumen- und Zeiteinheit geleistete Arbeit des $\underline{E}$-Feldes!

NB: $\underline{v}\cdot(\underline{j}\times\underline{B}) = 0$! Magnetfeld verrichtet *keine* Arbeit!

- Herleitung der Grundrelationen: allgemein in Materie

$$\left.\begin{array}{ll} +\underline{H}\cdot\,| & \underline{\nabla}\times\underline{E} = -\dfrac{\partial\underline{B}}{\partial t} \\ -\underline{E}\cdot\,| & \underline{\nabla}\times\underline{H} = \underline{j} + \dfrac{\partial\underline{D}}{\partial t} \end{array}\right\} \oplus$$

$$\underbrace{\underline{H}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{E}) - \underline{E}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{H})}_{\underline{\nabla}\cdot(\overset{\downarrow}{\underline{E}}\times\underline{H}) + \underline{\nabla}\cdot(\underline{E}\times\overset{\downarrow}{\underline{H}}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{E}\times\underline{H})} = -\underline{j}\cdot\underline{E} - \underline{E}\cdot\frac{\partial\underline{D}}{\partial t} - \underline{H}\cdot\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = -\underline{j} \cdot \underline{E}} \quad (6.22)$$

erste Deutung: Energiebilanz (differentielle Form)

$\overset{(4.41)}{\underset{(5.30)}{\sim}} \underline{E} \cdot \delta \underline{D} + \underline{H} \cdot \delta \underline{B}$

... Änderung der em Feldenergie & dissipierte Energie pro Vol. und Zeiteinheit

Joulesche Wärme/ mechan. Arbeit geht dem System verloren

Deutung $\longrightarrow$ Fluß der em Feldenergie aus Volumen!

$$\longrightarrow \boxed{\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}} \quad (6.23)$$

... Poynting vektor

= em. Energiestromdichte

= Energie/(Fläche * Zeit)