6.3.1 Erhaltung von Energie: Poyntingscher Satz

$$\boxed{\underline{E}\cdot\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\underbrace{\underline{E}\times\underline{H}}) = -\underline{j}\cdot\underline{E}} \quad (6.22)$$

$\sim \underline{E}\cdot\delta\underline{D} + \underline{H}\cdot\delta\underline{B}$

$$\boxed{\underline{S} = \underline{E}\times\underline{H}} \quad (6.23)$$

... Poyntingvektor

a) im Vakuum & „lineare Materialien"

(i) $\underline{D} = \varepsilon\,\underline{E}$ & $\underline{B} = \mu\,\underline{H}$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\varepsilon \neq \varepsilon(t)\\ \mu\neq\mu(t)\end{array}\right\}$ „unrealistisch"

$\longrightarrow$ Dichte der em. Feldenergie: Gl. (4.42) & (5.31)

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{H}\cdot\underline{B}\right)} \quad (6.24)$$

mit $\frac{\partial u}{\partial t} = \underline{E}\cdot\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

$\xrightarrow{(6.22)}$
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{S} = -\underline{j}\cdot\underline{E}} \quad (6.25)$$

... Bilanzgleichung für em Feldenergie

(ii) integrale Formulierung: $\qquad \int (6.25)\,dV$ & Gauss

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_V u\, d^3r}_{\text{zeitl. Änderung der em Feldenergie}} + \underbrace{\int_{\partial V}\underline{S}\cdot d\underline{f}}_{\text{Fluß der em. Feldenergie aus V heraus}} = \underbrace{-\int_V \underline{j}\cdot\underline{E}\, d^3r}_{\text{Joulesche Wärme/ mechan. Arbeit an V}}} \quad (6.26)$$

b) linear dispersive Materie:

(i) frequenzabhängige Materialkonstanten:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \qquad (6.27)$$
$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$$

sind komplex!
später mehr Details!

(ii) zeitlich periodische Felder: im Komplexen

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \qquad \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{H}_0(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \qquad (6.28)$$
$$\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon(\omega)\underline{E}(\underline{r},t) \qquad \underline{B}(\underline{r},t) = \mu(\omega)\underline{H}(\underline{r},t)$$

(iii) reelle Felder:

$$\underline{E}_R = \mathrm{Re}(\underline{E}),\ \underline{H}_R = \mathrm{Re}(\underline{H}),\ \underline{D}_R = \mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)\underline{E}),\ \underline{B}_R = \mathrm{Re}(\mu(\omega)\underline{H})$$

(iv) Berechnung von

$$u_D = \frac{1}{T}\int_0^{T=2\pi/\omega} \left(\underline{E}_R \cdot \frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} + \underline{H}_R \cdot \frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t}\right) dt \qquad (6.29)$$

im zeitlichen Mittel sollte Feldenergie konstant sein!

Rest?

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i \sin\omega t$$

mit $\frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[-i\omega\,\varepsilon(\omega)\underline{E}\right] = \omega\left[-\varepsilon'(\omega)\sin\omega t + \varepsilon''(\omega)\cos\omega t\right]\underline{E}_0$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

$$\frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[-i\omega\mu(\omega)\underline{H}\right] = \omega\left[-\mu'(\omega)\sin\omega t + \mu''(\omega)\cos\omega t\right]\underline{H}_0$$

$$\underline{E}_R = \underline{E}_0\cos\omega t \quad , \ \underline{H}_R = \underline{H}_0\cos\omega t$$

(1) Terme mit $\varepsilon'(\omega)$ & $\mu'(\omega)$ in (6.29)

Anteil von $\underline{D}_R \sim \cos\omega t$ in Phase mit $\underline{E}_R$!
" " $\underline{B}_R \sim$ " " " $\underline{H}_R$!

$$\sim \int_0^{T=2\pi/\omega} \underbrace{\cos\omega t \sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} = 0!$$

→ [im Mittel ändert sich em. Feldenergie nicht!]

(2) Terme mit $\varepsilon''(\omega)$ & $\mu''(\omega)$ in (6.29):

Anteil von $\underline{D}_R \sim \sin\omega t$ um 90° phasenverschoben mit $\dot{\underline{E}}_R$!

" " $\underline{B}_R \sim$ " " " " " $\dot{\underline{H}}_R$!

$$\sim \frac{1}{T}\int_0^{T=2\pi/\omega} \cos^2\omega t \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} u_D &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\underline{E}_R \cdot \frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} + \underline{H}_R \cdot \frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t}\right) dt \\ &= \frac{\omega}{2}\left[\varepsilon''(\omega)\,\underline{E}_0^2(\underline{r}) + \mu''(\omega)\,\underline{H}_0^2(\underline{r})\right]\end{aligned}} \quad (6.30)$$

Deutung: pro Periode dissipierte Energie pro Zeit & Volumen!

$\longleftrightarrow$ $\varepsilon''(\omega)$, $\mu''(\omega)$.

c) Gesamtsystem: geladene Teilchen & em Felder im Vakuum

Führe ein: $\dfrac{du_{mech}}{dt} = \underline{j} \cdot \underline{E}$ ... mechan. Arbeit pro Zeiteinheit an Teilchen

$$\xrightarrow{(6.25)} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mech} + u_{Feld}\right) + \operatorname{div} \underline{S} = 0} \quad (6.31)$$

mechan. Energie (inklusive Wärme)

Feldenergie $= \frac{1}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{H}\cdot\underline{B}\right)$

... Energieerhaltung

= Kont. gl. $\hat{=}$ Energie!

6.32 Impulserhaltung

- jetzt: mechanischer Impuls $\longleftrightarrow$ Impuls des em. Feldes

  $\longrightarrow$ Ableitung einer Kontinuitätsgl. im Vakuum!

- zeitl. Änderung des mech. Impulses:

$$\boxed{\frac{dP_{mech}}{dt} = \frac{d}{dt}\int \underbrace{p_{mech}}_{\text{materielle Impulsdichte}} d^3r = \int_V f(\underline{r},t)\,d^3r = \int (\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})\,d^3r} \quad (6.32)$$

- Umformung von:

$$\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B} \overset{\text{Maxwell}}{=} \underline{\nabla}\cdot\underline{D}\,\underline{E} + \left(\underline{\nabla}\times\underline{H} - \frac{\partial\underline{D}}{\partial t}\right)\times\underline{B}$$

$$= \underline{E}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{D} + \underline{B}\times\frac{\partial\underline{D}}{\partial t} - \underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{H})$$

$$\left[\frac{\partial\underline{B}}{\partial t} = -\underline{\nabla}\times\underline{E}\right] \quad = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\underline{D}\times\underline{B})}_{1} + \underbrace{(\underline{\nabla}\times\underline{E})\times\underline{D} + \underline{E}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{D}}_{2} - \underbrace{\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{H})}_{3}$$

1 Deutung:

$$\boxed{p_{em} = \underline{D}\times\underline{B} \underset{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}}{=} \frac{1}{c^2}\,\underline{E}\times\underline{H} = \frac{1}{c^2}\,\underline{S}} \quad (6.33)$$

... Impulsdichte des em. Feldes

Grund: in (6.32): $\displaystyle\frac{d}{dt}\int p_{em}\,d^3r$

2 in Komp:

$$E_i\nabla_j D_j - \nabla_i(\underbrace{E_j}\, \underbrace{D_j}_{\varepsilon_0 E_j}) + D_j\nabla_j E_i$$

$$= \nabla_j(E_i D_j) - \frac{1}{2}\nabla_i(E_j D_j) = \nabla_j\left(E_i D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E_k D_k\right)$$

3 in Komp:

$$-[\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{H})]_i = -\nabla_i(B_j H_j) + B_j\nabla_j H_i + H_i\underbrace{\nabla_j B_j}_{=0!}$$

$$= \nabla_j \left(H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} H_k B_k \right)$$

② + ③

Definiere:
$$\boxed{T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(E_k D_k + H_k B_k \right)} \quad (6.34)$$

... Maxwellscher Spannungstensor

NB: Kap. 3.3.6, Gl. (3.44) .. elektrostatischer Anteil

→ Oberflächenkraft

· Integrale Impulsbilanz: (6.32) & ① - ③

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt} \int (p_{mech} + p_{em})_i \, d^3 r}_{\text{zeitl. Änderg. des Gesamtimpulses (mechan. \& em. Feld)}} = \int_V \nabla_j T_{ij} \, d^3 r = \underbrace{\int_{\partial V} T_{ij} \, df_j}_{\text{Oberflächenkraft durch em Feld}}} \quad (6.35)$$

· differentielle Impulsbilanz: V beliebig

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(p_{mech} + p_{em})}_{\text{Gesamtimpulsdichte}} - \operatorname{div} \underline{\underline{T}} = 0}$$

$-\underline{\underline{T}}$ ... Impulsstromdichte

... Kontinuitätsgl. für Impuls