

6.3.1 Erhaltung von Energie: Poynting'scher Satz

$$\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = -\underline{j} \cdot \underline{E} \quad (6.22)$$

$$\sim \underline{E} \cdot \underline{SD} + \underline{H} \cdot \underline{SB}$$

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} \quad (6.23)$$

... Poyntingvektor

a) im Vakuum & "lineare Materialien"

$$(i) \quad \underline{D} = \epsilon \underline{E} \quad \& \quad \underline{B} = \mu \underline{H} \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon \neq \epsilon(t) \\ \mu \neq \mu(t) \end{array} \right\} \text{ "unrealistisch"}$$

→ Dichte der em. Feldenergie: Gl. (4.42) & (5.31)

$$u = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B}) \quad (6.24)$$

$$\text{mit } \frac{\partial u}{\partial t} = \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$(6.22) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E} \quad (6.25)$$

... Bilanzgleichung für em. Feldenergie

(ii) integrale Formulierung: $\int (6.25) dV$ & Gauss



$$\frac{d}{dt} \int_V u d^3r + \int_{\partial V} \underline{S} \cdot d\underline{f} = - \int_V \underline{j} \cdot \underline{E} d^3r \quad (6.26)$$

zeitl. Änderung
der em. Feld-
energie

Fluß der
em. Feld-
energie aus
V hinaus

Ionisierende Wärme/
mechan. Arbeit an V

b) linear dispersive Materie:

(i) frequenzabhängige Materialkonstanten:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad (6.27)$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$$

sind komplex!

später mehr Details!

(ii) zeitlich periodische Felder: im Komplexen

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0(\underline{r}) e^{-i\omega t} \quad \underline{H}(\underline{r}, t) = \underline{H}_0(\underline{r}) e^{-i\omega t} \quad (6.28)$$

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \epsilon(\omega) \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \underline{B}(\underline{r}, t) = \mu(\omega) \underline{H}(\underline{r}, t)$$

(iii) reelle Felder:

$$\underline{E}_R = \text{Re}(\underline{E}), \quad \underline{H}_R = \text{Re}(\underline{H}), \quad \underline{D}_R = \text{Re}(\epsilon(\omega) \underline{E}), \quad \underline{B}_R = \text{Re}(\mu(\omega) \underline{H})$$

(iv) Berechnung von $T = 2\pi/\omega$

$$w_D = \frac{1}{T} \int_0^T (\underline{E}_R \cdot \frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} + \underline{H}_R \cdot \frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t}) dt \quad (6.29)$$

im zeitlichen Mittel sollte Feldenergie konstant sein!

Rest?

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

$$\text{mit } \frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} = \text{Re}[-i\omega \epsilon(\omega) \underline{E}] \quad \omega [-\epsilon'(\omega) \sin \omega t + \epsilon''(\omega) \cos \omega t] \underline{E}_0$$

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

$$\frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t} = \text{Re}[-i\omega \mu(\omega) \underline{H}] = \omega [-\mu'(\omega) \sin \omega t + \mu''(\omega) \cos \omega t] \underline{H}_0$$

$$\underline{E}_R = \underline{E}_0 \cos \omega t, \quad \underline{H}_R = \underline{H}_0 \cos \omega t$$

(1) Terme mit $\epsilon'(\omega)$ & $\mu'(\omega)$ in (6.29)

Anteil von $\underline{D}_R \sim \cos \omega t$ in Phase mit \underline{E}_R !

" " $\underline{B}_R \sim$ " " " \underline{H}_R !

$$\sim \int_0^{T=2\pi/\omega} \underbrace{\cos \omega t \sin \omega t}_{\frac{1}{2} \sin 2\omega t} dt = 0!$$

→ [im Mittel ändert sich em. Feldenergie nicht!]

(2) Terme mit $\varepsilon''(\omega)$ & $\mu''(\omega)$ in (6.29):

Anteil von $\underline{D}_R \sim \sin \omega t$ um 90° phasen verschoben mit $\dot{i}_R!$

" " $\underline{B}_R \sim$ " " " " " " $\dot{i}_R!$

$$\sim \frac{1}{T} \int_0^{T=2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{u}_D &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\underline{E}_R \cdot \frac{\partial \underline{D}_R}{\partial t} + \underline{H}_R \cdot \frac{\partial \underline{B}_R}{\partial t} \right) dt \\ &= \frac{\omega}{2} \left[\varepsilon''(\omega) \underline{E}_0^2(\underline{r}) + \mu''(\omega) \underline{H}_0^2(\underline{r}) \right] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Deutung: pro Periode dissipierte Energie pro Zeit & Volume!
 $\leftrightarrow \varepsilon''(\omega), \mu''(\omega)$.

c) Gesamtsystem: geladene Teilchen & em. Felder im Vakuum

Führe ein: $\frac{dU_{\text{med}}}{dt} = \underline{j} \cdot \underline{E}$... mechan. Arbeit pro Zeiteinheit an Teilchen

$$\xrightarrow{(6.25)} \frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{med}} + u_{\text{feld}}) + \text{div } \underline{S} = 0 \quad (6.31)$$

mechan. Energie (in diffuse Wärme) Feldenergie
 $= \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B})$

... Energieerhaltung
 = Kont. gl. für Energie!

6.32 Impulserhaltung

• jetzt: mechanischer Impuls \longleftrightarrow Impuls des em. Feldes
 \rightarrow Ableitung einer Kontinuitätsgl. im Vakuum!

• zeitl. Änderung des mechan. Impulses:

$$\frac{dP_{\text{mech}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int P_{\text{mech}} d^3r = \int_V f(\underline{r}, t) d^3r = \int (\rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}) d^3r \quad (6.22)$$

↑
 materielle
 Impulsdichte

• Umformung von: Maxwell

$$\begin{aligned} \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B} &= \nabla \cdot \underline{D} \underline{E} + (\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}) \times \underline{B} \\ &= \underline{E} \nabla \cdot \underline{D} + \underline{B} \times \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} - \underline{B} \times (\nabla \times \underline{H}) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\nabla \times \underline{E} \right] = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\underline{D} \times \underline{B})}_{\textcircled{1}} + \underbrace{(\nabla \times \underline{E}) \times \underline{D}}_{\textcircled{2}} + \underline{E} \nabla \cdot \underline{D} - \underbrace{\underline{B} \times (\nabla \times \underline{H})}_{\textcircled{3}}$$

① Deutung:

$$P_{\text{em}} = \underline{D} \times \underline{B} \stackrel{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}{=} \frac{1}{c^2} \underline{E} \times \underline{H} = \frac{1}{c^2} \underline{S} \quad (6.33)$$

... Impulsdichte des em. Feldes

Gesd: in (6.32): $\frac{d}{dt} \int P_{\text{em}} d^3r$

② in Komp:

$$E_i \nabla_j D_j - \nabla_i (\underbrace{E_j D_j}_{\epsilon_0 E_j}) + D_j \nabla_j E_i$$

$$= \nabla_j (E_i D_j) - \frac{1}{2} \nabla_i (E_j D_j) = \nabla_j (E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k)$$

③ in Komp:

$$-\left[\underline{B} \times (\nabla \times \underline{H}) \right]_i = - \nabla_i (\underbrace{B_j H_j}_{=0!}) + B_j \nabla_j H_i + H_i \nabla_j \underbrace{B_j}_{=0!}$$

$$= \nabla_j (H_i B_j - \frac{1}{2} S_{ij} H_k B_k)$$

②+③

Definiere:

$$T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - \frac{1}{2} S_{ij} (E_k D_k + H_k B_k) \quad (6.34)$$

... Maxwell'sche Spannungstensor

NB: Kap. 3.3.6, Gl. (3.44) .. elektrostatischer Anteil

→ Oberflächkraft

• Integrale Impulsbilanz: (6.32) & ①-③

$$\frac{d}{dt} \int (\rho_{\text{mech}} + \rho_{\text{em}})_i d^3r = \int_V \nabla_j T_{ij} d^3r = \int_{\partial V} T_{ij} d\vec{f}_j \quad (6.35)$$

zeitl. Änderung des
Gesamtimpulses
(mechan. & em. Feld)

Oberflächkraft
durch em. Feld

• differentielle Impulsbilanz: V beliebig

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{mech}} + \rho_{\text{em}}) - \text{div} \underline{\underline{I}} = 0$$

Gesamtimpuls-
dichte

$\underline{\underline{I}}$... Impulsstromdichte

... Kontinuitätsgl. $\underline{\underline{J}}$ = Impuls