

## 7. Die spezielle Relativitätstheorie

- revidiert die Vorstellung von Raum & Zeit, gültig seit Galilei
- zentrale Rolle: E. Dynamik & Lichtausbreitung im Äther
  - H.A. Lorentz: Lorentztrafos für E, B-Feld  
" Kontraktion
  - H. Poincaré: mathematische Struktur der Lorentz-Trafo  
Invarianz der Maxwell-Gln. unter "
- in Richtung klassischer Sichtweisen
- Einstein (1905): „frischer“ Blick auf die Theorie!

### 7.1 Situation vor Einstein

- Vorstellung von Raum-Zeit:

(1) physikal. Raum = Euklidischer Raum = flacher Raum in 3D (7.1)

Abstand vom Raumpunkt  $(x, y, z)$  vom Ursprung:  $d = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Länge von Vektoren  $\underline{v}$ :  $v = |\underline{v}| = (\underline{v} \cdot \underline{v})^{1/2} = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$  (7.2)

Winkel zwischen  $\underline{v}, \underline{w}$ :  $\cos \alpha = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{vw}$  (7.3)

(2) absolute Zeit  $t$

- Inertialsysteme (IS):

(1) in ihnen gelten die Newtonschen Axiome

(2) bewegen sich gleichförmig zueinander

- Galileisches Relativitätsprinzip:

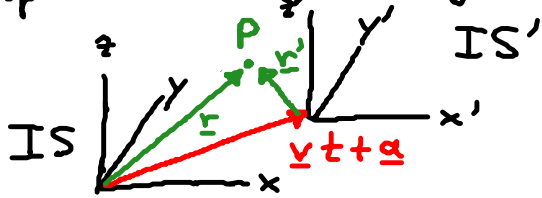
Alle IS sind gleichwertig

= die Newtonschen Axiome sind forminvariant (= kovariant) (7.4)

unter Galilei trafo zwischen verschiedenen IS

#### 7.1.1 Galilei-Transformation

• spezielle Galilei-Transfo:



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{a} \quad (7.5) \quad \xrightarrow{\text{o.B.d.A.}} \underline{v} = v \underline{e}_x, \underline{a} = \underline{0}$$

„boost“ in x-Richtung

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (7.6)$$

Zeit läuft absolut!

• Addition von Geschw.:

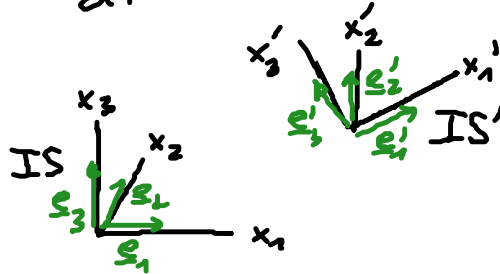
$$\underline{v}_0 \text{ in IS} \xrightarrow{\frac{d}{dt} (7.5)} \underline{v}' = \underline{v}_0 - \underline{v} \quad (7.7) \text{ in IS'}$$

• Kovarianz der Newtonschen Gdgl.:

$$\text{IS: } \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \underline{K}(\underline{r}, t) \xrightarrow{(7.5)} \text{IS': } \frac{d^2 \underline{r}'}{dt'^2} = \underline{K}'(\underline{r}', t) \quad (7.8)$$

• allgemeine Galileitransfo:

$$\begin{cases} \underline{r}' = \underline{R}(\underline{r} - \underline{v}t - \underline{a}) \\ t' = t - t_0 \end{cases} \quad (7.9)$$



NB:  $\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$  ... in Komp. bzgl. ONB von IS  
 $\underline{r}'$  ... " " " " von IS'

$\underline{v}$  ... gleichförmige Bewegung („boost“), 3 Komp.

$\underline{a}$  ... konst. Verschiebung, 3 Komp.

$t_0$  ... " " " " , 1 Parameter

$\underline{R}$  ... Drehg von IS nach IS', 3 Eulersche Winkel

→ Galileigruppe mit 10 Parametern bzgl. Hintereinander-Ausführung

## 7.1.2 Lichtausbreitung

• Licht = em. Welle: von Einstein, verwirklichte Tatsachen

• Wellenl. für Lichtwellen:  $g=0, j=0$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{K}}{\partial t}) = 0 \rightarrow \underbrace{\underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{E})}_{=0} - \underline{\nabla}^2 \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{K}}_{\substack{(54) \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}}} = 0$$

$$\rightarrow \left( \underline{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{E} = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (7.10)$$

... Wellenl. für  $\underline{E}$ -Feld!

(i) Lösung:  $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$  mit  $\omega = ck$  (7.11)

Transversalwelle:

$$\underline{E} \perp \underline{k} \quad \text{wegen } \text{div } \underline{E} = 0$$

$\rightarrow c$  ... Geschw der em. Welle  
= Lichtgeschwindigkeit

(ii) Problem: in welchem IS gilt  $c$ ?

Idee Einsteins:  $c$  unabh. von IS

• Maxwell-Gln. / Wellenl. nicht invariant unter Galilei-Trafo!

Grund:  $\frac{\partial}{\partial t'} \underline{E}'(\underline{r}', t') = \frac{d}{dt} \underline{E}'(\underline{r} - \underline{v}t, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{E}(\underline{r}, t)$  etc...

$\rightarrow$  Galilei-Trafo nur für Mechanik!

• Ätherhypothese:

Licht bewegt sich mit  $c$  in einem „elastischen Medium“ = Äther. Dieses darf keine Schallwellen = Longitudinalwellen erlauben (7.12)

Äther = IS:  $c$  ... Wellengeschw.

IS':  $\underline{c} = -\underline{v}$  "

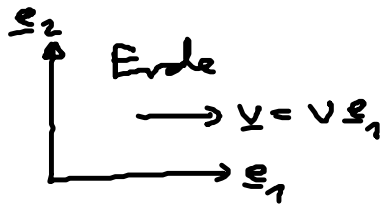
, falls Geschw.addition der Galilei-Trafo gilt!

# 7.1.3 Michelson - Morley - Experiment

Nobelpreis  
1907

1887: höhere Genauigkeit

- Grundidee: zum Nachweis der Ätherhypothese



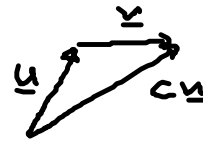
$$v = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

= Umlaufgeschw. um die Sonne

(i) Senkrecht Lichtstrahl auf Erde:

Geschw. im Äther:  $c \underline{e}_2$

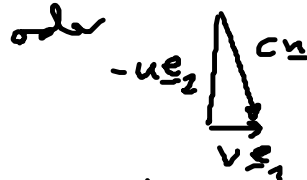
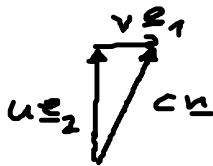
" auf Erde:  $\underline{u} = c \underline{e}_2 - \underline{v}$   
(167)



(ii)  $\underline{u} \parallel \underline{e}_1$ : Äther:  $\pm c \underline{e}_1$

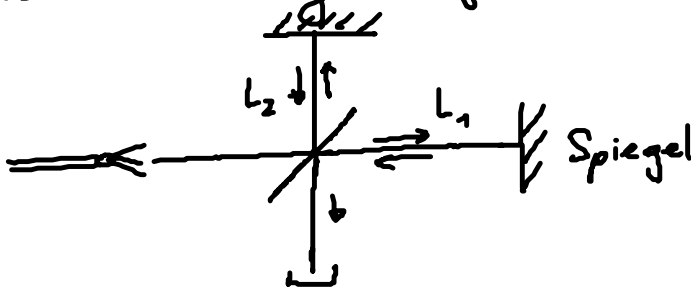
Erde:  $\pm (c \mp v) \underline{e}_1 \rightarrow |\underline{u}| = c \pm v$

$\underline{u} \parallel \underline{e}_2$



$$\rightarrow |\underline{u}| = \sqrt{c^2 - v^2}$$

• Versuchsanordnung: (auf Erde)



Detektor: misst Interferenzmuster

• Laufzeiten:

entlang  $L_1$ :  $T_1 = \frac{L_1}{c+v} + \frac{L_1}{c-v} = \frac{2L_1}{c(1-\frac{v^2}{c^2})}$  (7.13)

entlang  $L_2$ :  $T_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L_2}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  (7.14)

$T_1 \neq T_2$  sogar wenn  $L_1 = L_2$

• Idee: Rotation der Spiegelanordg  $\rightarrow$  Änderung des Interferenzmuster  
Ergebnis: keine Änderung  $\rightarrow$  Bewegung der Erde kann nicht nachgewiesen werden!

• Erklärungsversuch:

(1) H.A. Lorentz & G.F. Fitzgerald:

Lorentz Kontraktion:

entlang  $v$ -Richtung: Verkürzung materieller Objekte  
um Faktor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

also: in (7.13)  $L_1 \rightarrow L_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$   $\rightarrow$  Interferenzmuster  
bleibt gleich

NB: Längenkontraktion in SRT  
gilt allgemein

(2) oder: gleiches  $c$  auf Erde & Weltraum

= Einsteins Idee!

## 7.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

• Einstein kannte MM-Experiment "nicht"!

aber: war überzeugt, daß ein absolutes Bezugssystem (Äther)  
nicht existieren kann.

$\rightarrow$  Alle IS sind gleichwertig  
= alle physikal sind kovariant unter  
Lorentz-Transf. (7.15)

NB: (1) Lorentz-Transf verbindet zwei IS

(2) Relativ. prinzip gilt über Mechanik hinaus!

Wellenf.  
der  $\underline{E}$ -Dynamik

Die Lichtgeschw.  $c$  ist unabh. von IS (7.16)

NB: Maxwell-Gl. sind invariant unter  
Lorentz-Transf und damit in alle IS gültig

$\rightarrow$  neue Struktur der Raum-Zeit = Minkowski-Raum!