7.2 Einsteinsches Relativitätsprinzip

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Alle IS sind gleichwertig}\\ \quad = \text{alle physikal. Gesetze sind kovariant}\\ \quad\quad \text{unter Lorentztrafos}\end{array}} \quad (7.15)$$

$$\boxed{\text{Die Lichtgeschw. } c \text{ ist unabh. von IS}} \quad (7.16)$$

→ neue Struktur der Raum-Zeit = Minkowski-Raum!

• Lichtgeschwindigkeit:
seit 20.10.1983: (17. Generalkonferenz für Maß und Gewicht)

$$\boxed{c = 299\,792\,458 \,\frac{m}{s} \quad \text{exakt}} \quad (7.17)$$

mit Sekundedefinition:

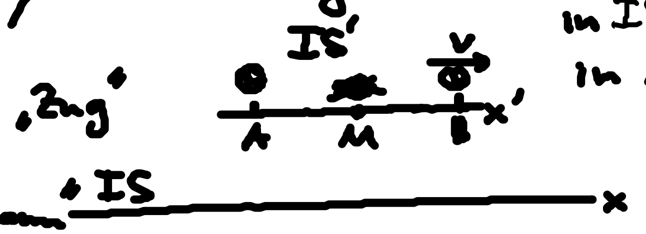
1 s ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur Niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs ausgesandten Strahlung.

→ Meterdefinition:

1 m ist die Länge, welche Licht im Vakuum während des Zeitintervalls $\frac{1}{299\,792\,458}$ s durchläuft

• erste Konsequenz: Gleichzeitigkeit hängt von IS ab!

Synchronisierung von Uhren: Bahndammexperiment
in IS' bei A, B durch Lichtblitze
in M: $|AM| = |BM|$



Beobachter in IS: Licht kommt bei A früher an

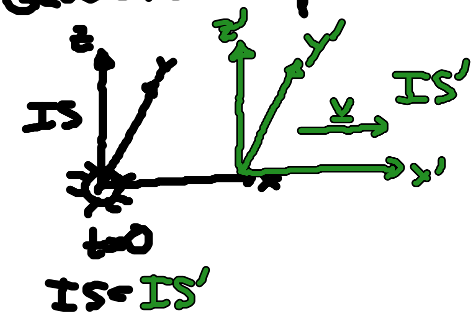
NB: endliche, maximale Signalgeschw. → keine absolute Zeit!

7.3 Die Lorentztransformation

- Trafo von IS $\longrightarrow$ IS'
- Einsteins Herleitung

7.3.1 Invarianz des Lichtkegels

- Gedanken-Exp.:



Ausbreitung eines Lichtpulses bei $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in IS: } -c^2t^2 + \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} = 0 \\ &\text{in IS': } -c^2t'^2 + \underbrace{x'^2+y'^2+z'^2}_{r'^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7.20)$$

Zeit in IS'

Zeit verläuft unterschiedlich in IS und IS'!

- Lineare Trafo: $\{\mathbf{r},t\} \longrightarrow \{\mathbf{r}',t'\}$

Grund: kräftefreie Teilchen bewegen sich auf Geraden in IS, IS'

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0 \longrightarrow \ddot{\mathbf{r}}' = 0$$

also: (7.20) $\longrightarrow$ $-c^2t^2 + r^2 = \lambda(\mathbf{v})\,[-c^2t'^2 + r'^2]$

Geschw. von IS'

(i) $\lambda(\mathbf{v}) = \lambda(v)$ ... Isotropie des Raumes

(ii) IS $\longrightarrow$ IS' $\longrightarrow$ IS: $\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \pm 1$

keine Stetigkeit für $v \to 0$

$$\boxed{-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (7.21)$$

... Norm im Minkowski Raum ist Lorentz-Skalar

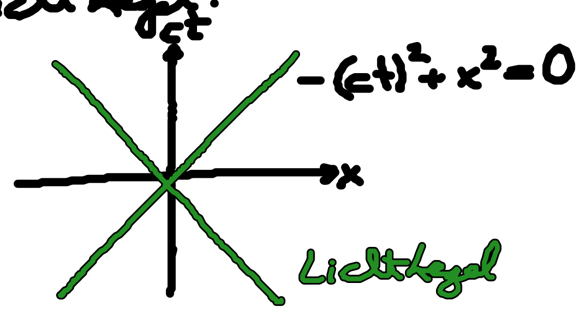
NB: (1) Verallgemeinerung auf allg. Raum-Zeit-Punkt: (x,t)

(2) Skalar = invariant unter Koord.trafo

(3) Norm = Länge von Raum-Zeit-Abständen

(4) Minkowski: Zeit als $-(ct)^2$ in Norm

• Lichtkegel:



7.3.2 Der Minkowski-Raum

• durch (7.21) vorgeschlagene Struktur der Raum-Zeit = 4D Raumzeit

• Erinnerung an Euklidischen Raum:

(i) Punkt im 3D-Raum: $x, y, z \longrightarrow$ Ortsvektor $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(ii) Länge von $\underline{r}$ = Euklidische Norm:

$$\boxed{\Delta s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sum_i x_i^2 = x_i\, g_{ij}\, x_j} \qquad (7.22)$$

mit metrischem Tensor: g_{ij} ... Elemente von $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

NB: (1) Δs^2 ... invariant gegen beliebige Rotationen des KOS

(2) (7.22) auch für Relativvektor: $\Delta\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$!

• jetzt: Minkowski-Raum

(i) (kontravarianter) Vierervektor

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}} \qquad (7.23)$$

Komp: x^α, $\alpha = 0,1,2,3$

$[x^0 = ct!]$

(ii) Minkowski-Norm:

$$\boxed{\Delta s^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \quad (7.24)$$

mit $\left[g_{\alpha\beta} \text{ Elemente von } \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right]$ metrischer Tensor (7.25)

(iii) kovariante Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{Komp.:} \quad \boxed{x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta} \quad (7.26)$$

$\longrightarrow$ Minkowski-Norm: $\boxed{\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha}$ (7.27)

NB: (1) Summiere über Paare gleicher hoch- und tiefgestellter Indizes

(2) (7.27) <u>ohne</u> $g_{\alpha\beta}$

• <u>Definition</u>

Lorentztrafo lassen die Minkowski-Norm (7.24) invariant (7.28)

allgemeinste, homogene & lineare Trafo:

$$\boxed{x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} x^\beta} \quad (7.29) \qquad \xrightarrow{(7.28)} \qquad \boxed{\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha}\, g_{\alpha'\beta'}\, \Lambda^{\beta'}{}_{\beta} \\ \underline{g} &= \underline{\Lambda}^{T} \underline{g}\, \underline{\Lambda} \end{aligned}} \quad (7.30)$$

$\underbrace{x^{\alpha'}}_{\text{Koord. in IS}'}$

... definiert Lorentztrafo

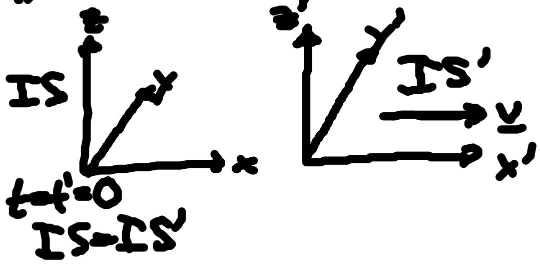
Beweis: $\Delta s'^2 \overset{!}{=} \Delta s^2$

$$\longrightarrow x^{\alpha'} g_{\alpha'\beta'} x^{\beta'} \underset{(7.29)}{=} \Lambda^{\alpha'}{}_{\alpha} x^\alpha g_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\beta'}{}_{\beta} x^\beta \overset{!}{=} x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta$$

$\xrightarrow{\text{Koeffizienten-vergleich}}$ (7.30)

7.3.3. Die spezielle Lorentz-Trafo

• „boost" in x-Richtung: also $y=y'$, $z=z'$



allg. lineare Trafo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \qquad (7.21)$$

⋮ s. Extra Blatt

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ \beta &= \frac{v}{c}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \qquad (7.22)$$

... Lorentz-Trafo für „boost" in x-Richtung

NB. (1) $\beta = \frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow \beta = 0, \gamma = 1$

$$\xrightarrow[\beta c = v]{(7.22)} \left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \text{Galilei-Trafo!}$$

(2) Gleichzeitigkeit ist relativ/hängt von IS ab:

synchronisiere Uhren in IS: 

$$\longrightarrow ct' \underset{ct=0}{=} -\gamma\beta x$$

... nicht synchronisiert in IS'!