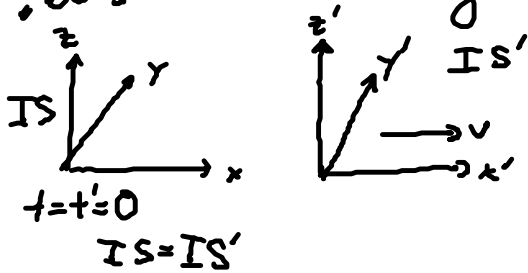


7.3.3 Die spezielle Lorentztrafo

• „boost“ in x -Richtung:



\Rightarrow

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma (ct - \beta x) \\ \beta &= \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (7.32)$$

7.3.4 Allgemeine Lorentztrafo

• allgemeine Gestalt:

$$x^{\alpha'} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} x^{\alpha} + a^{\alpha'} \quad (7.33)$$

$a^{\alpha'} = 0$... homogene Lorentztrafo

$a^{\alpha'} \neq 0$... inhomogene " = Poincaré trafo

• Eigensdaffen:

(1) $\{\underline{\Lambda}, \underline{a}\}$... (Poincaré-) Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung

$$\{\underline{\Lambda}_1, \underline{a}_1\}, \{\underline{\Lambda}_2, \underline{a}_2\} \rightarrow \{\underline{\Lambda}_1 \underline{\Lambda}_2, \underline{\Lambda}_1 \underline{a}_2 + \underline{a}_1\}$$

Beweis: Übung

(2) Parameter:

$\underline{\Lambda}$... 3 für Geschw. boost
3 für Rotation

\underline{a} ... 4 " Zeit-, Raumtranslationen

} 10 parametrische Gruppe

• allgemeiner Geschw. boost:

$$(7.32) \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}!} \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

... boost in $v e_1$

$-\frac{v}{c} v e_1$ $\underline{\underline{1}} + (\gamma - 1) \frac{e_1 \otimes e_1}{v^2}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• allgemeines $\underline{\underline{v}}$:

$$\underline{\underline{\Lambda}}_v = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c} v^t \\ -\frac{\gamma}{c} v & \underline{\underline{1}} + \frac{\gamma-1}{v^2} v \otimes v \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

• Rücktrafo: $IS' \rightarrow IS$

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}}_{-v} \quad (7.36a)$$

• allgemeine Rotationen: verdrehe Koord.achsen

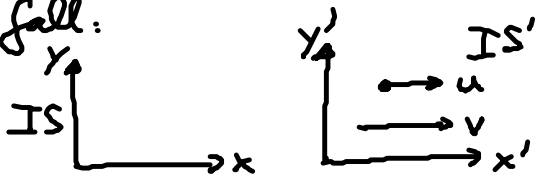
$$\underline{\underline{\Lambda}}_R = \begin{pmatrix} 1 & \underline{\underline{0}}^t \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{R}} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{R}} \in O(3) \quad (7.37)$$

• allgemeines $\underline{\underline{\Lambda}}$:

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}_R \underline{\underline{\Lambda}}_v \quad (7.38)$$

7.3.5 Geschwindigkeitsaddition

• Spezialfall:



• invertiere spezielle Trafo (7.32): $v \rightarrow -v$

$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + \beta ct') \\ ct &= \gamma (ct' + \beta x') \end{aligned} \quad (7.39)$$

• Massepkt. in IS' : $x' = ut'$ in (7.39)

$$\begin{aligned} x &= \gamma t' (u + \beta c) \\ t &= \gamma t' \left(1 + \beta \frac{u}{c}\right), \quad \beta = \frac{v}{c} \end{aligned}$$

→ Geschw. in IS :

$$w = \frac{x}{t} = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (7.41)$$

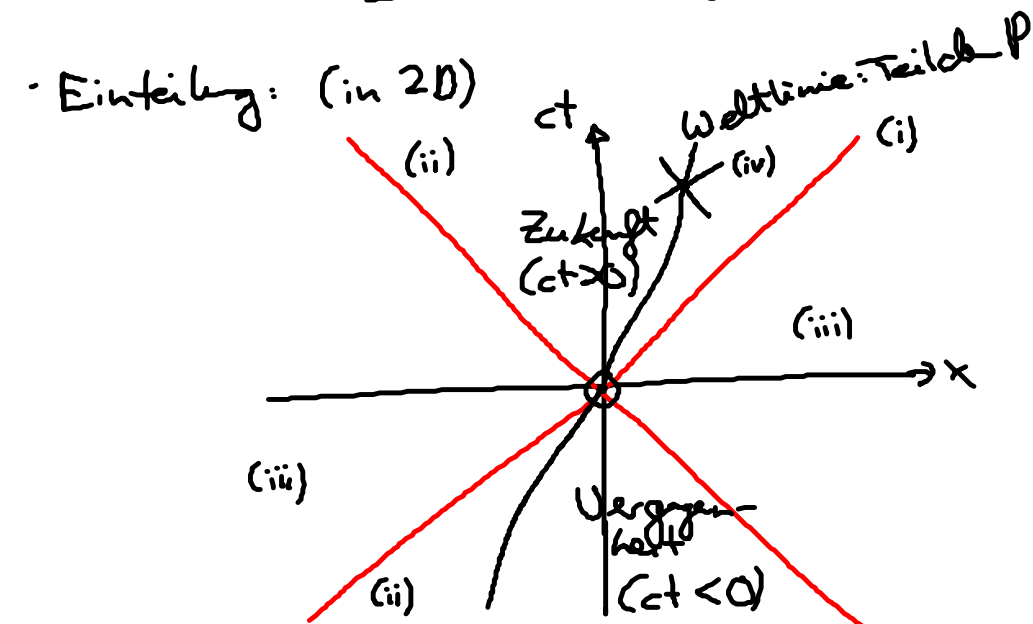
NB: (1) $u, v \ll c \rightarrow w = u+v \checkmark$

(2) $u = c \rightarrow w = \frac{v+c}{1 + \frac{v}{c}} = c$

$c =$ maximale Geschw in SRT, in allen IS gleich (7.42)

7.4 Die 4D Raumzeit der SRT

7.4.1 Raumzeit-Diagramme



(i) Lichtkegel = „lichtartige Ereignisse“

$$\Delta s^2 = x^2 - (ct)^2 = 0$$

(ii) zeitartige Ereignisse (im Lichtkegel):

$$\Delta s^2 = x^2 - (ct)^2 < 0$$

kausal mit Ursprung \odot verbunden $\hat{=}$ Geschw. von Ursachen $< c$

Vorwärtslichtkegel ($ct > 0$): durch \odot beeinflussbar

Rückwärts " ($ct < 0$): \odot beeinflusst

→ Weltlinie von Teilchen P durch \odot liegen im Lichtkegel

(iii) raumartige Ereignisse (außerhalb Lichtkegel):

$$\Delta s^2 = x^2 - (ct)^2 > 0 \quad (7.45)$$

kausal nicht mit \odot verbunden

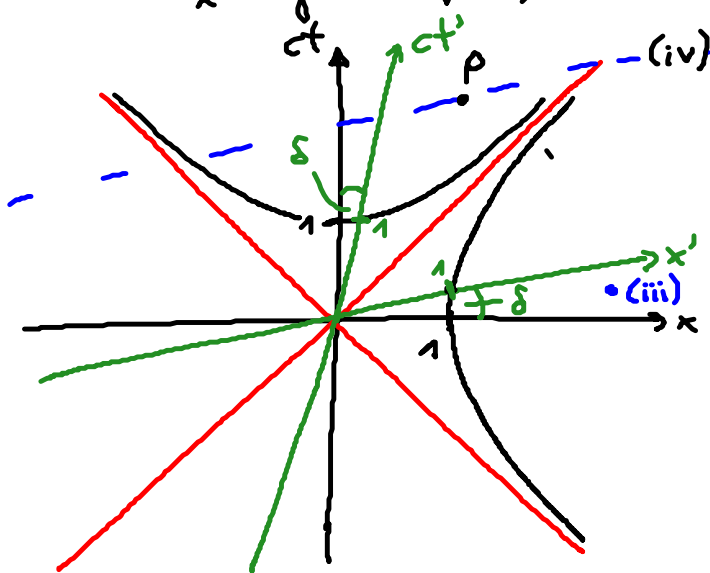
(iv) Lichtkegel von P (Ereignis): strukturiert Raumzeit

• Lorentztrafo:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

(7.32) } affine Trafo



(i) IS' - Achse?
 ct' -Achse: $x'=0 \rightarrow ct = \frac{1}{\beta}x$, $\tan \delta = \beta$, im Lichtkegel
 x' -Achse: $ct'=0 \rightarrow ct = \beta x$, außerhalb "

(ii) gleicher Lichtkegel!

(iii) Zukunft (IS: $ct > 0$) & Vergangenheit (IS': $ct' < 0$) sind relativ

(iv) Relativität der Gleichzeitigkeit:

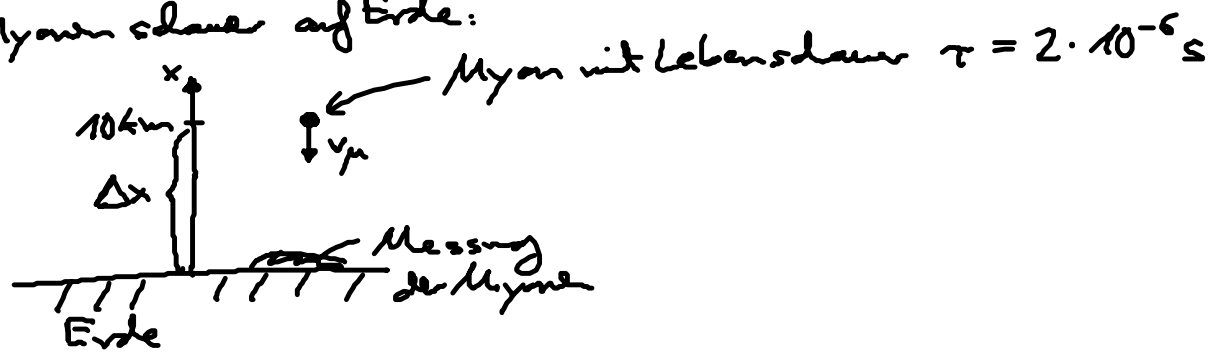
--- gleiches ct' , nicht gleiches ct !

(v) Einheitsmaßstab: vgl. Euklid. Raum: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$!

hier: $x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 = \pm 1$... Hyperbeln

7.4.2 Ein illustratives Bsp: Zeitdilatation & Lorentzkontraktion

Myonensdauer auf Erde:



(1) ohne SRT: $v_\mu \approx c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$\rightarrow \Delta s = v_\mu \tau = 600m \ll 10km$ ✓

(2) mit SRT: IS = Erde

IS' = Myon bei $x'=0$, „innere Uhr“: $\tau = \Delta t'$

a) in IS: Flugzeit Δt ?

$$(7.32) \rightarrow c \Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (1)$$

$$\Delta x' = 0 = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \Delta x = \beta c \Delta t$$

$$\text{in (1)} \rightarrow c \Delta t' = \gamma c \Delta t \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t < \Delta t \quad (7.46)$$

... Zeitdilatation: bewegte Uhren
gehen langsamer

$$\text{Bsp: } v = 0.999c \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{5}{100} \rightarrow \Delta t = \frac{100}{5} \tau = 4 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$\Delta x = c \Delta t = 12 \text{ km } \checkmark$$

b) in IS': Flugweg $\Delta x'$? Messe Δx in IS' für $\Delta t' = 0!$

$$(7.32) \rightarrow \Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (3)$$

$$0 = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow c \Delta t = \beta \Delta x$$

$$\text{in (3)} \rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\rightarrow \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x < \Delta x \quad (7.47)$$

... Lorentzkontraktion
= bewegte Maßstäbe sind
kürzer!

• im Raumzeit-Diagramm: