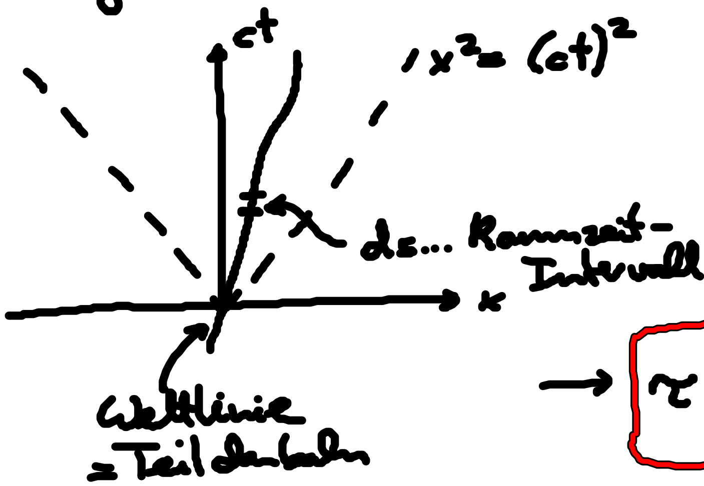
7.4.3 Eigenzeit

• Ablauf der Zeit im Ruhesystem einer bewegten Uhr$_{(7.16)}$ ($x'=0$!):



$$c\,d\tau = c\,dt' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,c\,dt$$
$$= \left[c^2dt^2 - v^2dt^2\right]^{1/2}$$
$$= \big[\underbrace{c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2}_{ds\ \ldots\ \text{Lorentzskalar}}\big]^{1/2}$$

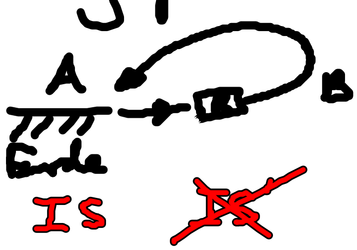
$$\longrightarrow \boxed{\tau = \int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt = \int\gamma^{-1}dt = \frac{1}{c}\int ds}$$

... Eigenzeit = Lorentzskalar!

= „Weglänge" in 4D Raumzeit

NB: momentane ct'-Achse:
tangential an Weltlinie der Uhr/Teilchen wegen $x'=0$

• Zwillingsparadoxon:

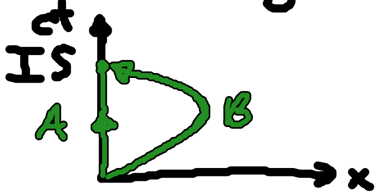


A: B jünger bei Rückkehr, da Uhren im bewegten KS langsamer gehen

B: A " " " " " "

Ausweg: Situation ist <u>nicht</u> symmetrisch
Erde = IS
R ≠ IS' (wegen Umkehrabbremsen & beschleunigen)

Raumzeit-Diagramm.



A: $\tau_A \overset{v=0}{=} t = \int dt$

B: $\tau_B = \frac{1}{c}\int ds = \int \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}} < \tau_A$!!!

7.4.4 Kontra-/Kovariante Vektoren

• Differenzvektor:

(i) 2 nahe Raumzeit-Punkte

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct_1 \\ \underline{x}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{kontravariante Vierervektoren (7.23)}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} c\,dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t_2 - t_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx \end{pmatrix}}_{\text{kontravarianter Vierervektor!}} \quad (7.49)$$

(ii) Norm:

$$\boxed{ds^2 = dx^2 - (c\,dt)^2 = dx^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha} \quad (7.49a)$$

kovarianter Vektor: $dx_\alpha = g_{\alpha\beta} dx^\beta$

ebenso: $\boxed{dx^\beta = g^{\beta\alpha} dx_\alpha}$ (7.50)

„Hochziehen des Index" $\boxed{\text{mit } g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma}$ ... Kroneckersymbol

Beweis: klar

hier: $g_{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ mit $\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ (7.51)

(iii) Transformation:

für Raumzeit-Punkte $x^{\alpha'}_{1/2} = L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, x^{\alpha}_{1/2} + a^{\alpha}$

$$\longrightarrow \boxed{dx^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, dx^{\alpha}} \quad (7.52)$$

... Trafo von kontravarianter Vierervektor

kovarianter 4er Vektor:

$$\boxed{dx_{\beta'} = L_{\beta'}^{\ \beta}\, dx_{\beta} = dx_{\beta} \underbrace{(L^{-1})^{\beta}_{\ \beta'}}} \quad (7.53)$$

Trafo von IS'→IS (!) (Überlege selber)

denn $g_{\beta'\alpha'}\, dx^{\alpha'} = g_{\beta'\alpha'} L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, dx^{\alpha} = g_{\beta'\alpha'} L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, g^{\alpha\beta}\, dx_{\beta}$

$$\longrightarrow \boxed{L_{\beta'}^{\ \beta} = g_{\beta'\alpha'} L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, g^{\alpha\beta}} \quad (7.54)$$

- Idee: Formuliere physikal. Gesetze mit Skalaren, 4er-Vektoren, etc in 4D-Raumzeit

  $\longleftrightarrow$ Einsteins Rel.prinzip erfüllt!

NB: Skalar $\longrightarrow$ Skalar
4er Vektor $\longrightarrow$ 4er Vektor
Tensor $\longrightarrow$ Tensor

$\longleftrightarrow$ Konstruiere / Identifiziere 4er-Vektoren
(1) aus bekannten 4er-Vektoren & Skalaren
(2) durch Trafoverhalten: $v^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\ \alpha}\, v^{\alpha}$

- Beispiel: Vierergradient

IS $\longrightarrow$ IS': $\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} L^{\alpha'}_{\ \alpha}$ wie in (7.53)!

$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = L_{\alpha'}^{\ \alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)} \quad (7.55)$$

... kovarianter 4er-Vektor

$$\longrightarrow \boxed{\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)} \quad (7.56)$$

... kontravarianter 4er-Vektor

„Norm"

$$\boxed{\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (7.57)$$

... Quabla operator = Skalar!
Wellen

NB: anderes Vorzeichen als in (6.12)
i.f. verwenden wir (7.57)

- Erweiterung:

v^α, w^α .. 4er-Vektoren $\longrightarrow$ $\boxed{v \cdot w = v^\alpha w_\alpha}$ (7.58)

... Skalarprodukt im Minkowski-Raum
= Lorentzskalar

7.5 Relativistische Mechanik

- Ziel: Verallg. der Newtonschen Grundgleichung f. $v \to c$

Weg: (i) Führe ein Raumzeit-4er-Vektoren
(ii) $\frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow$ Newton Mechanik

7.5.1 Impuls

- Differenzvektor: dx^α, $dx = \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}$ (7.48)

- Vierer-Geschw.:

$$\boxed{u^\alpha = \underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\tau}}_{\text{Skalar}} \underset{(7.49)}{=} \gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad u = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix}} \quad (7.59)$$

$d\tau = \gamma^{-1} dt$

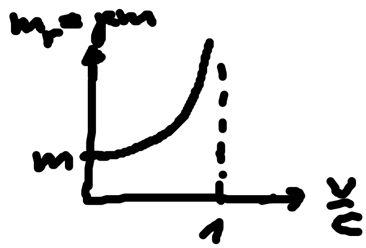
• Vierer-Impuls:

$$\boxed{p^\alpha = m u^\alpha , \quad p = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}} \quad (7.60)$$

Masse = Skalar

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{v} = c\,\frac{\mathbf{p}}{p^0}} \quad (7.61)$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{geschw. abhängige Impulsmasse } m_p!}\,\mathbf{v}} \quad (7.62)$$



7.5.2 Impulssatz

• Führe ein:

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \underbrace{K^\alpha}_{\text{Vierer-(Minkowski)-Kraft!}}}$$

Bedeutung?

(i) räumliche Komponenten: ($\alpha = 1,2,3$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma\,\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boxed{\gamma\,\mathbf{F} = \mathbf{K}} \quad (7.64)$$

(ii) zeitliche Komponente: ($\alpha = 0$)

- Geschw. quadrat:

$$u^\alpha u_\alpha \underset{(7.58)}{=} \gamma^2 \underbrace{\left(-c^2+v^2\right)}_{-c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = -c^2 \quad (7.65)$$

- Betrachte: $\frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} u^\alpha u_\alpha = 0 = m u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} = u_\alpha \frac{dp^\alpha}{d\tau}$

$$\longrightarrow \quad 0 = u_\alpha K^\alpha = -\underbrace{u^0}_{\gamma c} K^0 + \gamma \underline{v} \cdot \underbrace{\underline{K}}_{\gamma \underline{F}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} K^0 &= \frac{\gamma}{c}\, \underline{v} \cdot \underline{F} \\ &= \frac{\gamma}{c}\, W \end{aligned}} \qquad (7.66)$$

pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit = Leistung

- **Teilchen mit $m \neq 0$ kann <u>nicht</u> in endlicher Zeit mit endl. Kraft auf $v = c$ gebracht werden.** (7.67)

Bew.: (7.64) $\infty > \int \underline{F}\, dt = \underline{p} = \dfrac{m \underline{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow \infty, \quad v \to c$ ↯