

7.5 Relativistische Mechanik

• 4er - Geschw:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} \rightarrow u = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix}$$

• 4er - Impuls:

$$p^\alpha = m u^\alpha, \quad p = \begin{pmatrix} m \gamma c \\ m \gamma \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \underline{p} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \underline{p} = \frac{m}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\text{Impulsmasse } m_v}} \underline{v}$$

• Impulssatz: $\frac{dp^\alpha}{d\tau} = K^\alpha$

$$\text{mit } \underline{K} = \gamma \underline{F}$$
$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

7.5.3 Energiesatz

• aus 0.ter Komp. von Impulssatz:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{dE}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{F} \\ \text{mit } E = c p^0 = \underbrace{m \gamma c^2}_{m_v} \end{array}} \quad (7.68)$$

... Energie eines Teilchens

• Grenzfall: $\frac{v}{c} \ll 1$

$$[(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x]$$

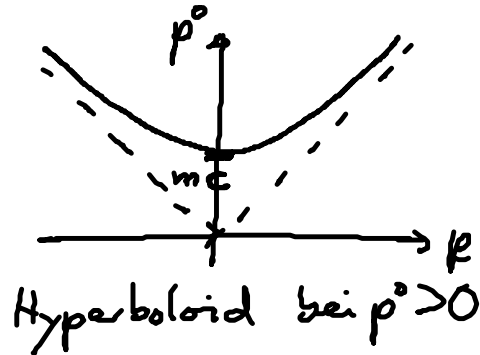
$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinet. Energie}}} \quad (7.63)$$

• Massenschale:

$$p^2 = p^\alpha p_\alpha = m^2 u^\alpha u_\alpha \stackrel{(7.65)}{=} -m^2 c^2$$

$$\boxed{(p^0)^2 - p^2 = m^2 c^2 = \text{konst}} \quad (7.70)$$



Energie: $\boxed{E = m_r c^2 \underset{cp^0}{=} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \quad (7.71)$

7.5.4 Photonen

• Ruhemasse: $m=0 \rightarrow (p^0)^2 \stackrel{(7.70)}{=} p^2 \dots$ Vorwärtslichtkegel

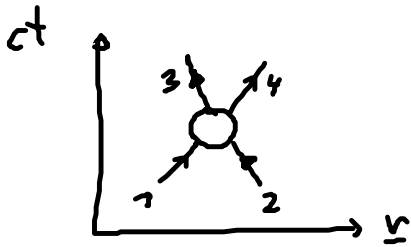
$$\rightarrow \boxed{p = \begin{pmatrix} |p| \\ p \end{pmatrix} \stackrel{qm}{=} \hbar k = \begin{pmatrix} \hbar \omega \\ \hbar k \end{pmatrix}} \quad (7.73)$$

mit $E = \underbrace{|p|c}_{\hbar \omega} = \hbar \omega$

• Masselose Teilchen bewegen sich mit $|v|=c$ (7.74)

Bew: $\underset{(7.61)}{v} = c \frac{p}{p^0} \rightarrow |v|=c$

7.5.5 Stoßprozess



$$\left. \begin{array}{l} \text{klassisch: } p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \\ \text{kinet. Energie: } T_1 + T_2 = T_3 + T_4 \\ m_1 + m_2 = m_3 + m_4 \end{array} \right\} (7.75)$$

relativistisch: Erhaltung von 4er-Impuls

$$\boxed{p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \iff p_1^\alpha + p_2^\alpha = p_3^\alpha + p_4^\alpha} \quad (7.76)$$

$\alpha = 0$: $cp^0 = m_r c^2 \dots$ Energieerhaltg.: kinet. + Ruheenergie

$\alpha = 1, 2, 3$: Impulserhaltg.

Bsp: Ruheenergie \rightarrow Strahlungsenergie:

Anihilation: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$

Zerfall: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

7.6 Elektrodynamik in kovarianter Formulierung

E. dynamik schon in richtiger Form, keine Verallgemeinerung nötig

aber: kovariante Schreibweise \rightarrow konstruiere passende 4er-Vektoren, 4er-Tensoren

7.6.1 Vierervektor

• Erfahrungssatzade:

$$\boxed{\text{elektr. Ladg } q \text{ ist erhalten in jedem IS} = \text{Lorentzinvariante}} \quad (7.77)$$

• Konsequenzen:

bewegt sich mit \underline{v}

$$(i) \quad dq = \rho dV = \underbrace{\rho_R}_{\text{Ruhesystem von } dq} dV_R \quad (7.78)$$

Transform dV: $dV = dx dy dz \stackrel{\text{Lorentztransformation in } \underline{v}\text{-Richtung}}{=} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dx_R dy_R dz_R = \frac{1}{\gamma} dV_R$

$\xrightarrow{\text{in (7.78)}}$ $\boxed{\rho_R = \frac{1}{\gamma} \rho} \quad (7.79)$

... Ladgsdichte im Ruhesystem
= Lorentzskalar

(ii) differentielle Form:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0}_{\text{gilt in allen IS}} \quad \xrightarrow{\text{kovariante Form}} \quad \partial_\alpha = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$\partial = \text{Lorentzskalar}$

$$\boxed{\partial_\alpha j^\alpha = 0}$$

mit $j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \underline{j} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} \quad (7.80)$

... Viererstrom
= kontravarianter 4er-Vektor

mit 4er-Geschw: $u = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix} \quad (7.59)$

$$\rightarrow j = \frac{\rho}{\gamma} u \xrightarrow[\text{(7.10)}]{\text{(7.79)}} \boxed{j^\alpha = \rho_R u^\alpha, \quad j = \rho_R \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix}} \quad (7.81)$$

... 4er-Vektor!

7.6.2 Viererpotential

Erinnerung:

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

Löse homog.
Maxwellgl.

← Lorentzbedg →

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \square \varphi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}} \quad (7.82)$$

$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha$

Führe ein:

Viererpotential:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \varphi \\ \underline{A} \end{pmatrix}} \quad (7.83)$$

... 4er Vektor! [Beweis: gleich]

Lorentzbedg: $\rightarrow \boxed{\partial_\alpha A^\alpha = 0} \quad (7.84)$

Wellengl. (7.82) $\rightarrow \boxed{\square A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha} \quad (7.85)$

Beweis: (1) $\alpha=0$: $\square \frac{1}{c} \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0 c} \rho = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^0 = -\mu_0 j^0 \quad \checkmark$

$\alpha=i$
 $=1,2,3$ $\square A_i = -\mu_0 j_i \quad \checkmark$

(2) j^α ... 4er Vektor & \square ... Skalar $\rightarrow A^\alpha$... 4er Vektor \checkmark

also: kovariante Formulierung der E. dynamik mit A^α !

7.6.3 Elektromagnetischer Feldstärke tensor

Frage: Wie fßt man $\underline{E}, \underline{B}$ zusammen?

• Führe ein:

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha} \quad (7.86) \quad \text{mit } \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

... kovarianten ein Feldstärketensor
= Faraday tensor

- NB: (1) Tensor 2. Stufe in 4D-Raumzeit
(2) Trafo klar, da Trafo ∂^α & A^α klar
(3) $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$... Antisymmetrie

• konkrete Form:

$$\boxed{F^{\alpha\beta} \text{ mit } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_1 & \frac{1}{c} E_2 & \frac{1}{c} E_3 \\ -\frac{1}{c} E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{1}{c} E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{1}{c} E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}} \quad (7.87)$$

„Beweis“: (1) $F^{0i} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i - \frac{1}{c} \nabla_i \varphi = \frac{1}{c} E_i$

(2) $F^{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k$

• Transformation: $IS \rightarrow IS'$

$$\boxed{F^{\alpha'\beta'} = L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} F^{\alpha\beta}} \quad (7.88)$$

(Name klarer. $\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{L}}$)

→ Trafo $\underline{E}, \underline{B}$: \underline{v} = boostantlag $\underline{v} = v \underline{e}$ mit $\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{v}}$ aus Gl. (7.36)

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}_{\parallel} + \gamma (\underline{E}_{\perp} + \underline{v} \times \underline{B}) \\ \underline{B}' &= \underline{B}_{\parallel} + \gamma (\underline{B}_{\perp} - \frac{\underline{v}}{c^2} \times \underline{E}) \end{aligned}} \quad (7.89)$$

... $\underline{E}, \underline{B}$ mischen bei Trafo!

mit Komponenten $\parallel \underline{e}$: $\underline{E}_{\parallel} = (\underline{e} \otimes \underline{e}) \underline{E} = \underline{e} (\underline{e} \cdot \underline{E})$, $\underline{B}_{\parallel} = \dots$

" $\perp \underline{e}$: $\underline{E}_{\perp} = (\underline{1} - \underline{e} \otimes \underline{e}) \underline{E} = \underline{E} - \underline{e} (\underline{e} \cdot \underline{E})$, $\underline{B}_{\perp} = \dots$

Beweis: s. Übung