7.5 Relativistische Mechanik

- 4er-Geschw.:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} \longrightarrow u = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix}$$

- 4er-Impuls:

$$p^\alpha = m u^\alpha \quad , p = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \underline{p} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \underline{p} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{Impulsmasse } m_r} \underline{v}$$

- Impulssatz: $$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = K^\alpha$$

$$\text{mit } \underline{K} = \gamma \underline{F}$$

$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

7.5.3 Energiesatz

- aus 0.ter Komp. vom Impulssatz:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{F} \qquad \text{mit } E = c p^0 = \underbrace{m\gamma}_{m_r} c^2} \quad (7.68)$$

... Energie eines Teilchens

· Grenzfall: $\frac{v}{c} \ll 1$ $\qquad [(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x]$

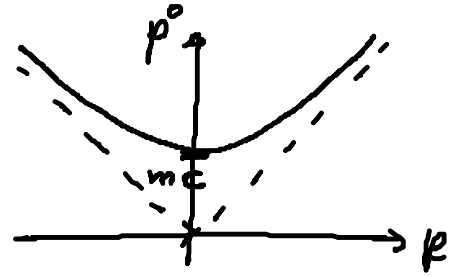
$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, c^2 \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\longrightarrow \boxed{E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\text{kinet. Energie}}} \qquad (7.69)$$

· Massenschale:

$$p^2 = p^\alpha p_\alpha = m^2 \underbrace{u^2}_{u^\alpha u_\alpha} \underset{(7.65)}{=} -m^2c^2$$

$$\boxed{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 = \text{konst}} \qquad (7.70)$$



Hyperboloid bei $p^0 > 0$

Energie: $\boxed{E = m_r c^2 \underset{cp^0}{=} \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}} \qquad (7.71)$

7.5.4 Photonen

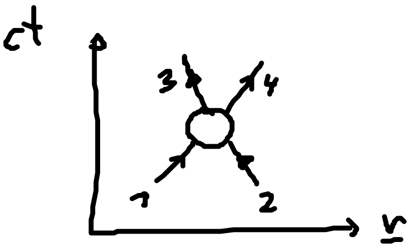
· Ruhemasse: $m = 0 \longrightarrow (p^0)^2 \underset{(7.70)}{=} \mathbf{p}^2$ (7.72) ... Vorwärtslichtkegel

$$\longrightarrow \boxed{p = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \overset{QM}{=} \hbar k = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad \text{mit } E = \underbrace{|\mathbf{p}|}_{p^0} c \overset{QM}{=} \hbar\omega} \qquad (7.73)$$

· $\boxed{\text{Masselose Teilchen bewegen sich mit } |\mathbf{v}| = c}$ (7.74)

Bew: $\mathbf{v} \underset{(7.61)}{=} c\,\frac{\mathbf{p}}{p^0} \longrightarrow |\mathbf{v}| = c$

7.5.5 Stoßprozeß



klassisch: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$

kinet. Energie: $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$

$m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ (7.75)

- relativistisch: Erhaltung von 4er-Impuls

$$\boxed{p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \longleftrightarrow p_1^\alpha + p_2^\alpha = p_3^\alpha + p_4^\alpha} \quad (7.76)$$

$\alpha = 0$: $c p^0 = m_r c^2$ ... Energieerhaltung: kinet. + Ruheenergie

$\alpha = 1,2,3$: Impulserhaltung

- <u>Bsp</u>: Ruheenergie $\longrightarrow$ Strahlungsenergie:

Annihilation: $e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma$

Zerfall: $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$

$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

7.6 <u>Elektrodynamik in kovarianter Formulierung</u>

- E.dynamik schon in richtiger Form, <u>keine</u> Verallgemeinerung nötig

<u>aber</u>: kovariante Schreibweise $\longrightarrow$ konstruiere passende 4er-Vektoren, 4er-Tensoren

7.6.1 <u>Viererstrom</u>

- Erfahrungstatsache:

$$\boxed{\text{elektr. Ladung } q \text{ ist erhalten in jedem IS} = \text{Lorentzinvariante}} \quad (7.77)$$

- Konsequenzen:

(i) $$dq = \rho \, \overset{\text{bewegt sich mit } \underline{v}}{dV} = \underbrace{\rho_R \, dV_R}_{\text{Ruhesystem von } dq} \quad (7.78)$$

Trafo von dV: $$dV = dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lorentzkontraktion} \\ \text{in } \underline{v}\text{-Richtung}}}{=} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dx_R\, dy_R\, dz_R = \frac{1}{\gamma} dV_R$$

$$\xrightarrow{\text{in (7.78)}} \quad \boxed{\rho_R = \frac{1}{\gamma}\rho} \quad (7.79)$$

... Ladungsdichte im Ruhesystem
= Lorentzskalar

(ii) differentielle Form:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot\underline{j} = 0}_{\substack{\text{gilt in allen IS} \\ 0 = \text{Lorentzskalar}}} \quad \underset{\substack{\text{kovariante} \\ \text{Form}}}{\overset{\partial_\alpha = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla}\right)}{\longleftrightarrow}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \partial_\alpha j^\alpha = 0 \\ \text{mit } \; j = \begin{pmatrix} c\rho \\ \underline{j} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix} \end{array}} \quad (7.80)$$

... Viererstrom
= kontravarianter 4er-Vektor

mit 4er-Geschw.: $$u = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

$$\longrightarrow \quad j = \frac{\rho}{\gamma} u \; \underset{(7.80)}{\overset{(7.79)}{\longrightarrow}} \; \boxed{j^\alpha = \rho_R u^\alpha , \quad j = \rho_R \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix}} \quad (7.81)$$

... 4er-Vektor!

7.6.2 Viererpotential

- Erinnerung:

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$
$$\underbrace{\underline{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}_{\text{Löse homog. Maxwellgln.}}$$

$$\xleftrightarrow{\text{Lorentzeichung}} \quad \underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\varphi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned}} \quad (7.82)$$

- Führe ein:

Viererpotential: $$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \underline{A} \end{pmatrix}} \quad (7.83)$$

... 4er Vektor! [Beweis: gleich]

Lorentzeichung: $\longrightarrow$ $$\boxed{\partial_\alpha A^\alpha = 0} \quad (7.84)$$

Wellengln. (7.82) $\longrightarrow$ $$\boxed{\Box A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha} \quad (7.85)$$

Beweis: (1) $\alpha = 0$: $\Box \frac{1}{c}\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0 c}\rho = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^0 = -\mu_0 j^0$ ✓

$\alpha = i$ $= 1,2,3$: $\Box A_i = -\mu_0 j_i$ ✓

(2) j^α... 4er Vektor & $\Box$... Skalar $\longrightarrow$ A^α... 4er Vektor ✓

- also: kovariante Formulierung der E.dynamik mit A^α!

7.6.3 Elektromagnetischer Feldstärketensor

- Frage: Wie faßt man $\underline{E}, \underline{B}$ zusammen?

· Führe ein:

$$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha} \quad (7.86) \qquad \text{mit } \partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \underline{\nabla}\right)$$

... kontravarianter em Feldstärketensor
= Faraday tensor

NB: (1) Tensor 2. Stufe in 4D-Raumzeit
(2) Trafo klar, da Trafo ∂^α & A^α klar
(3) $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ ... Antisymmetrie

· konkrete Form:

$$\boxed{F^{\alpha\beta} \text{ mit } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}} \quad (7.87)$$

„Beweis": (1) $F^{0i} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_i - \frac{1}{c}\nabla_i \varphi = \frac{1}{c}E_i$

(2) $F^{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i = \varepsilon_{ijk} B_k$

· Transformation: $IS \longrightarrow IS'$

$$\boxed{F^{\alpha'\beta'} = L^{\alpha'}{}_{\alpha} L^{\beta'}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}} \quad (7.88)$$

(Nomenklatur: $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{L}}$)

$\longrightarrow$ Trafo $f = \underline{E}, \underline{B}$: f = boost entlang $\underline{v} = v\underline{e}$ mit $\underline{\underline{\Lambda}}_v$ aus Gl. (7.36)

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}_\parallel + \gamma\left(\underline{E}_\perp + \underline{v}\times\underline{B}\right) \\ \underline{B}' &= \underline{B}_\parallel + \gamma\left(\underline{B}_\perp - \frac{\underline{v}}{c^2}\times\underline{E}\right) \end{aligned}} \quad (7.89)$$

... $\underline{E}, \underline{B}$ mischen bei Trafo!

mit Komponente $\parallel \underline{e}$: $\underline{E}_\parallel = (\underline{e}\otimes\underline{e})\underline{E} = \underline{e}(\underline{e}\cdot\underline{E})$, $\underline{B}_\parallel = \ldots$

" $\perp \underline{e}$: $\underline{E}_\perp = (1 - \underline{e}\otimes\underline{e})\underline{E} = \underline{E} - \underline{e}(\underline{e}\cdot\underline{E})$, $\underline{B}_\perp = \ldots$

Beweis: s. Übung