7.6.3 Elektromagnetischer Feldstärketensor

- $$\boxed{F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha} \quad (7.86)$$

$\longrightarrow$ $F^{\alpha\beta}$ mit:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.87)$$

- Trafo von IS nach IS': wegen $\partial^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_\alpha \partial^\alpha$ & $A^{\beta'} = L^{\beta'}{}_\beta A^\beta$

$$\longrightarrow \boxed{F^{\alpha'\beta'} = L^{\alpha'}{}_\alpha L^{\beta'}{}_\beta F^{\alpha\beta}} \quad (7.88)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}_\parallel + \gamma(\underline{E}_\perp + \underline{v}\times\underline{B}) \\ \underline{B}' &= \underline{B}_\parallel + \gamma(\underline{B}_\perp - \frac{\underline{v}}{c^2}\times\underline{E}) \end{aligned}} \quad (7.89)$$

$\parallel$ ... Komp. parallel $\underline{v}$
$\perp$ ... " senkrecht $\underline{v}$

Bsp: IS: stat. Ladungsverteilung & $\underline{B}=0$

$$\longrightarrow \text{IS}': \quad \begin{aligned} \underline{E}' &= \underline{E}_\parallel + \gamma \underline{E}_\perp \\ \underline{B}' &= -\gamma \frac{\underline{v}}{c^2}\times\underline{E} \end{aligned} \quad (7.91)$$

in $\underline{B}'$: $\gamma\underline{E} \to \gamma\underline{E}_\perp \to \underline{E}'$ $\longrightarrow$ $$\boxed{\underline{B}' = -\frac{\underline{v}}{c^2}\times\underline{E}'} \quad (7.92)$$

relative Ladung $\to$ $\underline{B}$-Feld in IS'

(1) $v \to c$: $\underline{B}' \approx -\frac{1}{c}\underline{e}\times\underline{E}'$, $\underline{v} = v\underline{e}$

(2) Punktladung in IS: $\gamma \approx 1$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}}{r^3} \underset{\gamma\approx 1}{\approx} \underline{E}' \longrightarrow \underline{B}' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2}\frac{\underline{v}\times\underline{r}}{r^3}$$

$$\left[c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\right] = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\underline{v}\times\underline{r}}{r^3} \qquad (7.93)$$

... Bio-Savart! (5.18)

mit $\underline{j} = q\underline{v}\,\delta(\underline{r})$

- kovariante Feldtensor:

$$\boxed{F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}F^{\gamma\delta} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (7.94)$$

- zu $F^{\alpha\beta}$ <u>dualer</u> Feldtensor:

$$\boxed{\bar{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 & \frac{1}{c}E_2 \\ -B_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 & -\frac{1}{c}E_1 \\ -B_3 & -\frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (7.95)$$

wobei:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1, & \text{gerade Permutation von } (0123) \\ -1, & \text{ungerade } " \quad " \quad " \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (7.96)$$

... total antisymmetrische Tensor
(Levi-Civita-Tensor)

- Invariante = Lorentz-Skalare:

(1) $$\boxed{F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2\left(\underline{B}^2 - \frac{1}{c^2}\underline{E}^2\right) = \mu_0 \left(\underline{B}\cdot\underline{H} - \underline{E}\cdot\underline{D}\right)} \quad (7.97)$$

$\longrightarrow$ reines $\underline{E}$-Feld kann nie auf reines $\underline{B}$-Feld transformiert werden und umgekehrt!

(2) $$\boxed{\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = -\frac{4}{c}\underline{E}\cdot\underline{B}} \quad (7.98)$$

„Skalarprodukt" in 3D bleibt erhalten!

$\longrightarrow$ spitzer/stumpfer Winkel ($\underline{E}\cdot\underline{B} \gtrless 0$) bleibt erhalten!

7.6.4 Maxwellgln. in kovarianter Form

- inhomogene Gln.:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\tfrac{1}{c}\underline{E}\right) &= \frac{1}{\varepsilon_0 c}\rho = \mu_0 j^0 \\ \operatorname{rot}\underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{c}\underline{E}\right) &= \mu_0 \underline{j} \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \boxed{\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\alpha} \quad (7.99)$$

... kovariante!

„Beweis:" $F^{\alpha\beta}$ aus Gl. (7.87)

$\alpha = 0$: 0.te Zeile von $F^{\alpha\beta}$ ✓

$\alpha = 1,2,3$: 1./2./3. Zeile von $F^{\alpha\beta}$ ✓

- $F^{\alpha\beta}$: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \cdots & \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ \vdots & & \cdots & \end{pmatrix}$

- homogene Gln.:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}\left(\tfrac{1}{c}\underline{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \boxed{\partial_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0} \quad (7.100)$$

... kovariant!

„Beweis": ...

alternative Form: Jacobi-Identität für $F^{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0} \quad (7.101)$$

$\underbrace{}_{\text{Tensor 3. Stufe}}$ & zyklische Vertauschung von α, β, γ

(1) $\alpha \neq \beta \neq \gamma$: homogene Maxwellgln.

(2) $\alpha = \beta, \ldots$

• Lorentzkraft:

(1) $\hat{=}$ Teilchen

$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \longrightarrow$ Vierer-Kraft

$$\boxed{\begin{aligned} K^\alpha &= q\, F^\alpha{}_\beta\, u^\beta \\ \text{mit} \quad F^\alpha{}_\beta &= F^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} \end{aligned}} \quad (7.102)$$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{\begin{aligned} K^0 &= \frac{\gamma}{c}\, \underline{v} \cdot \underline{F} \\ \underline{K} &= \gamma\, \underline{F} \end{aligned}}_{\text{wie gezeigt bei Mechanik}} \quad (7.66)$$

(2) $\hat{=}$ Kontinuum:

$\underline{f} = \rho\, \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B}$ (6.2) $\longrightarrow \boxed{k^\alpha = F^\alpha{}_\beta\, j^\beta}$ (7.103)

... 4er-Kraftdichte

7.6.5 Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

...

8. Ebene elektromagnetische Wellen

• Ziel: Beschreibung von em Wellen & dynamische Theorie von $\varepsilon(\omega)$

• Ausgangspkt. Maxwell-Gln. in Materie mit $\rho = 0$, $\underline{j} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{H} &= \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\underline{B} = \mu \underline{H} = \mu_r \mu_0 \underline{H}]{\underline{D} = \varepsilon \underline{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \underline{E}} \left\{\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \underline{B} &= \mu \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{aligned}\right. \quad (8.1)$$

NB: (1) $\varepsilon \neq \varepsilon(\underline{r})$, $\mu \neq \mu(\underline{r})$

(2) später: $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) \longrightarrow$ (8.1) gilt nur $\hat{=}$ $\underline{E}, \underline{B} \sim e^{i\omega t}$

8.1 Ebene Wellen im nichtleitenden, homogenen Medium

- Wellengleichung für $\underline{E}, \underline{B}$:

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{E} = \text{grad}\,\underbrace{\text{div}\,\underline{E}}_{=0} - \underline{\nabla}^2 \underline{E} \overset{(8.1)}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\underline{B} \overset{(8.1)}{=} -\mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E}$$

analog: $\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{B} = \quad \ldots \quad = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{B}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \left(\underline{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{E}(\underline{r},t) &= 0 \\ \left(\underline{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{B}(\underline{r},t) &= 0 \end{aligned}} \quad (8.2)$$

... Wellengl. für $\underline{E}, \underline{B}$!

mit $\boxed{\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}}$ (8.3) ... Ausbreitungsgeschw. von em Wellen in Materie (s.u.)

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ (8.4) .... Ausbreitungsgeschw. von Licht im Vakuum: aus Exp. bekannt!

Maxwell: $\boxed{\text{Licht} = \text{em Welle}}$ (8.5)

Hertz (1886): exp. Nachweis von em (Radio)-Wellen!

- Lösungsansatz für Gl. (8.2): ebene Welle (komplex)

$$\boxed{\begin{pmatrix}\underline{E}(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{E}_0\\ \underline{B}_0\end{pmatrix} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}} \quad (8.6)$$

mit (Kreis)frequenz: $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ (ν .. Frequenz, T .. Periodendauer)

Wellenvektor: $\underline{k} = k\,\hat{\underline{k}}$

Wellenzahl: $k = |\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ ... Wellenlänge)

NB: $\text{Re}(\underline{E}, \underline{B}) \longrightarrow$ reale Welle!

$$\xrightarrow{\text{in } (8.2)} \left(-k^2 + \frac{1}{\tilde{c}^2}\omega^2\right)\begin{pmatrix}\underline{E}\\ \underline{B}\end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\longrightarrow \quad \boxed{\omega = \pm \bar{c} k}$ (8.7)

... Dispersionsrelation: $\omega \leftrightarrow k$

$\bar{c}$ ... Phasengeschwindigkeit

mit $\boxed{\bar{c} = \frac{c}{n} \xrightarrow{(8.3)} n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$ ... Brechungsindex

i.R.: $\mu_r \approx 1 \longrightarrow \boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$ (8.9)

<u>NB</u>: Kugelwellen: $\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$ (8.10)

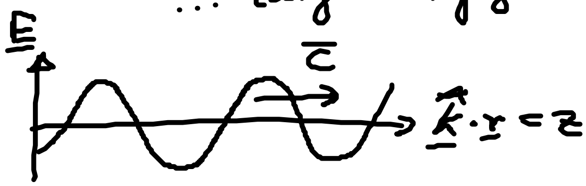
lösen auch (8.2)

· Wellenpakete:

(i) ebene Welle: (8.6) $\xrightarrow[(8.7)]{\underline{k} = k\hat{\underline{k}} = k e_z}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix}(\underline{r}, t) = \begin{pmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{B}_0 \end{pmatrix} e^{ik(z \mp \bar{c} t)} = \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix}(z \mp \bar{c} t)} \quad (8.11)$$

... läuft in/gegen Richtung $\hat{\underline{k}} = e_z$ mit Geschw. $\bar{c}$



(ii) ein Wellenpaket:

als Überlagerung von (8.11): zerläuft, weil $\bar{c} = \bar{c}(\omega)$ wegen $n = \bar{n}(\omega)$

= Dispersion! [→ Glasfaser]