

8.1 Ebene Wellen im nichtleitenden, homogenen Medium

Wellengl.:
$$\begin{cases} (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \underline{E}(r,t) = \underline{0} \\ (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \underline{B}(r,t) = \underline{0} \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Lösungsansatz:

$$\begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{B}_0 \end{pmatrix} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad (8.5)$$

$$\rightarrow \boxed{\omega = \pm \bar{c} k} \quad (8.7), \quad \boxed{\bar{c} = \frac{c}{n} \text{ mit } n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (8.8)$$

$$\text{oft: } \mu_r = 1 \rightarrow n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (8.9)$$

Dämpfung: komplexes $\epsilon(\omega)$

→ komplexer Brechungsindex: $\bar{n} = \sqrt{\epsilon_r} = n + i\kappa$

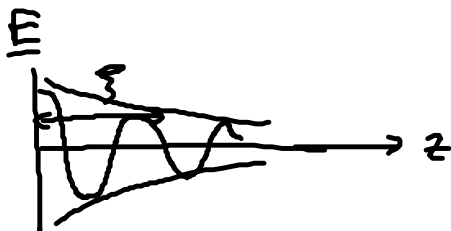
$$(8.7) \text{ \& } (8.8) \rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c} \bar{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa)} \quad (8.13)$$

ebene Welle: $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = i k z$

$$(8.5) \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_0 \\ \underline{B}_0 \end{pmatrix} e^{i \frac{\omega}{c} n (z - \frac{c}{n} t)} e^{-z/\xi}$$

$$\text{mit } \xi = \left(\frac{\omega \kappa}{c}\right)^{-1} \quad (8.14)$$

... Absorptionstiefe $\sim \frac{1}{\kappa}$!



Anwendg: später

• Polarisation:

$$\text{div } \underline{E} = 0$$

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

$$\text{div } \underline{E} \stackrel{(8.5)}{=} i \underline{k} \cdot \underline{E}_0 e^{i \dots}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 &\leftrightarrow \underline{E}_0 \perp \underline{k} \\ \underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0 &\leftrightarrow \underline{B}_0 \perp \underline{k} \end{aligned}} \quad (8.15)$$

... Transversalwellen

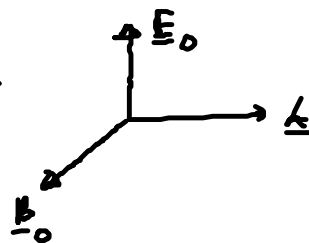
NB: i.a. $\underline{E}_0 \not\perp \underline{k}$ in anisotropen Kristallen,
aber $\underline{D}_0 \perp \underline{k}$, wegen $\underline{D} = \underline{\epsilon} \underline{E} \neq \underline{E}$
[→ Doppelbrechung]

(i) Lineare Polarisation:

$$\boxed{\underline{E}_0 = E_0 \underline{e} \longrightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \underline{E}_0} \quad (8.16)$$

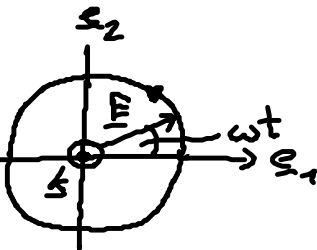
$$\text{rot } \underline{E} = i \underline{k} \times \underline{E}_0 e^{i \dots} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = i \omega \underline{B}_0 e^{i \dots} \quad \& \quad \frac{\underline{k}}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega} \hat{k} = \frac{1}{c} \hat{k}$$

also: $\underline{k}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden orthogonales Dreibein:



(ii) zirkuläre Polarisation:

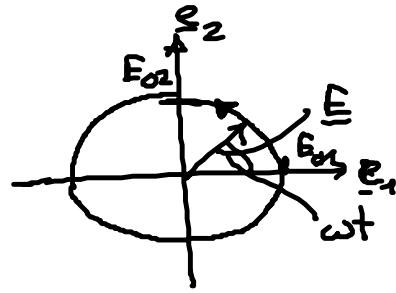
$$\boxed{\underline{E}_0 = E_0 (\underline{e}_1 \pm i \underline{e}_2)} \quad (8.17)$$



erzeugt um 90°
phasenverschobene Welle polarisiert entlang \underline{e}_2
bei Realteilbildung

(iii) elliptische Polarisation

$$\underline{E}_0 = E_{01} \underline{e}_1 \pm i E_{02} \underline{e}_2 \quad (P.18)$$



Beweis: Übung

(iv) Stokes-parameter/-vektor:

→ Polarisationszustand einer em Welle (Licht) aus Messung von Lichtintensität nach Durchgang durch geeignete Polarisatoren!

s. Übungen

• mittlere Energiedichte: mit $\underline{E}_R = \text{Re}(\underline{E})$, $\underline{B}_R = \text{Re}(\underline{B})$

$$\langle u \rangle \stackrel{(6.24)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (\underline{E}_R \cdot \underline{D}_R + \underline{H}_R \cdot \underline{B}_R) dt$$

$$\rightarrow \langle u \rangle = \frac{\epsilon}{2} |\underline{E}_0|^2 = \frac{1}{2\mu} |\underline{B}_0|^2 \quad (8.13)$$

Beweis: Übung

• mittlerer Poyntingvektor: Energiedichtedichte

$$\langle \underline{S} \rangle \stackrel{(6.23)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(\underline{E} \times \underline{H}) dt \rightarrow$$

$$\langle \underline{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\underline{E}_0|^2 \hat{k} = \langle u \rangle \bar{c} \hat{k} \quad (8.20)$$

... Energie wird mit \bar{c} entlang \hat{k} transportiert!

Vakuum: Impulsdichte der em Welle:

$$\langle \underline{p}_{em} \rangle \stackrel{(6.32)}{=} \frac{1}{c^2} \langle \underline{S} \rangle = \frac{\langle u \rangle}{c} \hat{k} = \frac{\langle u \rangle}{\omega} \underline{k} \quad (8.21)$$

Klassischer em Puls: besteht aus $N = \int \frac{\langle u \rangle}{\hbar \omega} d^3r$ Photonen

(8.21) → Impuls eines Lichtpulses:

$$\underline{P} = \int d^3r \langle \underline{p}_{\text{em}} \rangle = N n \underline{k} \quad (8.22)$$

qm Impuls eines Photons!

8.2 Reflexion, Transmission & Brechung

• Ziel: Übergang einer em. Welle an einer Trennfläche zweier Medien

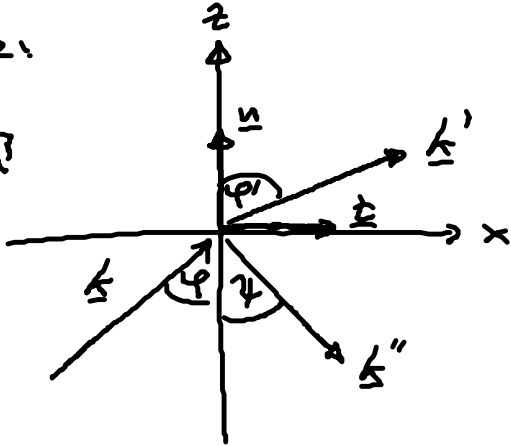
• Geometrie:

$$\epsilon', \mu'$$

$$n' = \sqrt{\epsilon' \mu'}$$

$$\epsilon, \mu$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$



(1) einfallende ebene Welle:

$$(8.23) \quad \underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\underline{B} = \frac{n}{c} \hat{k} \times \underline{E}$$

$$\omega = \bar{c} k = \frac{c}{n} k$$

(\underline{k}, n) ... definieren Einfallsebene

(2) durchgelassene Welle

$$(8.24) \quad \underline{E}' = \underline{E}'_0 e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega t)}, \quad \omega = \bar{c}' k' = \frac{c}{n'} k'$$

$$\underline{B}' = \frac{n'}{c} \hat{k}' \times \underline{E}'$$

(3) reflektierte Welle:

$$(8.25) \quad \underline{E}'' = \underline{E}''_0 e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega t)}, \quad k'' = k$$

$$\underline{B}'' = \frac{n}{c} \hat{k}'' \times \underline{E}''$$

• Randbedingungen: bei $z=0$

(1) stetige Normalkomponente:

$$(\underline{D} + \underline{D}'' - \underline{D}') \cdot \underline{n} = 0 \quad (8.26)$$

$$(\underline{E} + \underline{E}'' - \underline{E}') \cdot \underline{n} = 0$$

(2) stetige Tangentialkomp.:

$$(\underline{E} + \underline{E}'' - \underline{E}') \cdot \underline{z} = 0 \quad (8.27)$$

$$(\underline{H} + \underline{H}'' - \underline{H}') \cdot \underline{z} = 0$$

• kinematische Eigenschaft:

(8.26) & (8.27) gelten für alle x, t

→ identische Phasenfaktoren der Wellen

$$\rightarrow \boxed{\underline{k} \cdot \underline{r} \Big|_{z=0} = \underline{k}' \cdot \underline{r} \Big|_{z=0} = \underline{k}'' \cdot \underline{r} \Big|_{z=0}} \quad (8.28)$$

Folgerungen: (1) $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$ in einer Ebene!

$$\text{Qud: } \underline{k} \cdot \underline{e}_y = 0 \xrightarrow{(8.28)} \underline{k}' \cdot \underline{e}_y = 0 = \underline{k}'' \cdot \underline{e}_y \quad \checkmark$$

$$(2) (8.28) \rightarrow k \sin \varphi = k' \sin \varphi' = \frac{k''}{n} \sin \varphi$$

$$(8.29) \quad \left[\begin{array}{l} \varphi = \varphi' \quad \dots \text{ Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel} \\ \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n} \quad \dots \text{ Snelliussches Brechungsgesetz} \end{array} \right.$$

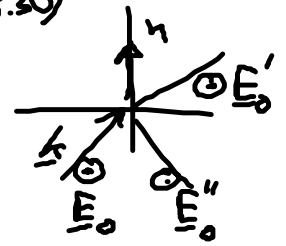
$$\text{NB: } n' > n \rightarrow \varphi' < \varphi$$

• dynamische Eigenschaft:

aus Randbed. (8.26) & (8.27) → Fresnelsche Formeln für $\underline{E}_0, \underline{E}'_0, \underline{E}''_0$
o.B.!

(i) $\underline{E}_0, \underline{E}_0', \underline{E}_0'' \perp$ Einfallsebene

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n \cos \varphi}{n \cos \varphi + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi'} \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n \cos \varphi - n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi'}{n \cos \varphi + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi'}} \quad (8.30)$$



NB: in optische Bereich: $\mu = \mu' = 1$

(ii) $\underline{E}_0, \underline{E}_0', \underline{E}_0''$ in Einfallsebene

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n \cos \varphi}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi + n \cos \varphi'} \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi - n \cos \varphi'}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \varphi + n \cos \varphi'}} \quad (8.31)$$

(iii) senkrecht einfallendes Licht: $\varphi = \varphi' = 0$

$$(8.30) \rightarrow \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n - n'}{n + n'} < 0 \quad \text{für } n' > n \quad (8.32)$$

„Phasensprung um 180° bei Reflexion an dichteren Medium“

Bsp. $n = 1, n' = \frac{4}{3}$ (H_2O) $\rightarrow \left| \frac{E_0''}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{1/3}{7/3} \right)^2 = 2\%$

• Brewster-Winkel:

Polarisation in Einfallsebene: $E_0'' = 0 \xleftrightarrow{(8.31)} n' \cos \varphi = n \cos \varphi'$

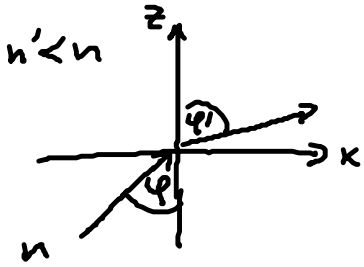
$$\xrightarrow{\text{a.K.}} \boxed{\varphi_B = \arctan \frac{n'}{n}} \quad (8.33)$$

... kein reflektierter Strahl

NB: (1) unter φ_B : reflekt. Licht: $\underline{E}_0'' \perp$ Einfallsebene

(2) Luft \rightarrow Glas: $\frac{n'}{n} = 1,5 \rightarrow \varphi_B = 56^\circ$

Total reflexion: beim Übergang in optisch dünneres Medium
bei $\varphi' = \frac{\pi}{2}$



$$k \sin \varphi = k' \sin \varphi' = k'$$

$$\rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{k'}{k} = \frac{n'}{n}$$

$$\boxed{\varphi_0 = \arcsin \frac{n'}{n}} \quad (2.34)$$

... Winkel der Totalreflexion

Für $\varphi > \varphi_0$: formal $\sin \varphi' = \frac{n}{n'} \sin \varphi > 1!$

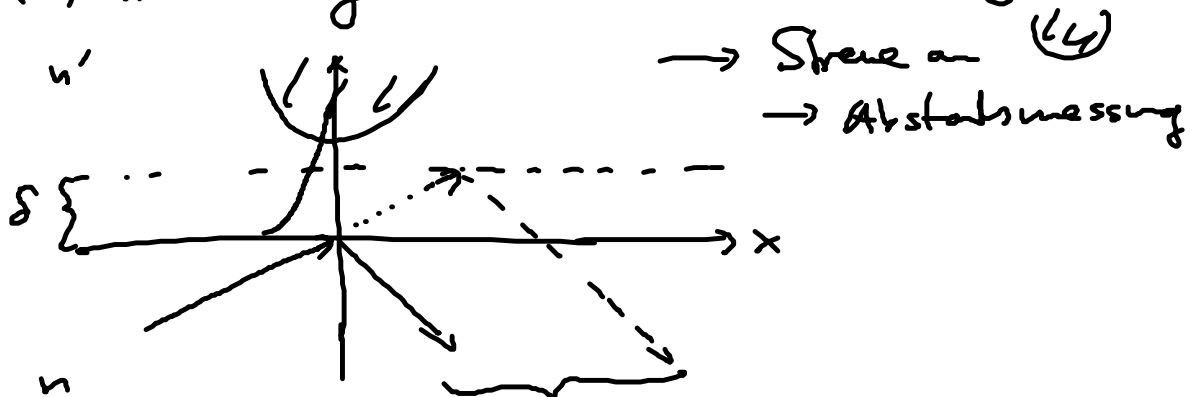
$$\text{oder } \cos \varphi' = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi'} = i \sqrt{\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \varphi - 1} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi_0} - 1}$$

$$\text{in } e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} = e^{i k' \sin \varphi' x} ; e^{i k' \cos \varphi' z} = e^{i k' \sin \varphi x} e^{-z/\delta}$$

mit Eindringtiefe:
$$\boxed{\delta = \frac{1}{k'} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0}}}$$

→ total reflektierter Strahl dringt ^{rein} exponentiell gedämpft in opt. dünneres Medium ein! → evanescente Welle

NB: (1) Anwendung in Mikroskopie/Lichtstrg:



→ Streue an (L)

→ Abtastmessung

(2)

seitliche Verschiebung
des total reflektierten Strahls
= Goos-Hänchen-Effekt