8.3 Dynamische Theorie der Dielektrizitätskonstanten

- Frequenzabhängigkeit: $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ... Dispersion
  dispersives Material

Auswirkungen:

(1) Phasengeschw. $\bar{c}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}}$

$\longrightarrow$ Wellenpakete zerlaufen

(2) $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) \neq 0 \longleftrightarrow$ Absorption von Energie

(3) komplexes $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\,\varepsilon''(\omega)$

formaler Zusammenhang $\varepsilon'(\omega) \longleftrightarrow \varepsilon''(\omega)$

$\longrightarrow$ Kramers-Kronig-Relation (Kap. 8.3.3)

- Theoriemodelle für $\varepsilon(\omega)$:

(1) Kap. 8.3.1 gebundene Elektronen

(2) " 8.3.2 freie (Leitungs-) Elektronen

- grobe Einordnung:

(i) Wiederholung: Kap. 4.2

$$\underline{D} = \varepsilon\,\underline{E} = \varepsilon_0\,\underline{E} + \underline{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\varepsilon_r} \underline{E} \qquad (8.38)$$

atomarer/molekularer Ursprung von χ:

Dipolmoment: $\underset{\uparrow}{p} = \varepsilon_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polarisierbarkeit}}}{\alpha}\, \underline{E} \longrightarrow \underline{P} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dichte}}}{N}\, p = \varepsilon_0 \underbrace{N\alpha}_{\chi} \underline{E} \qquad (8.39)$

NB: in dichten Systemen: $\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \qquad (4.37)$

wegen $\underline{E}_{loc} \neq \underline{E}$

(ii) Arten von Polarisierbarkeit:

(1) elektronisches Dipolmoment: Verschiebungspolarisation

$\underline{E} = 0$ $\longrightarrow$ $\underline{E} \neq 0$

gebundenes e^-

$p = 0$ $\longrightarrow p$

(2) ionisches Dipolmoment: im Ionenkristall (NaCl)

$\underline{E} = 0$

$\oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \ominus$

$\Sigma p = 0$

$\longrightarrow \underline{E} \neq 0$

$\oplus\ominus \;\; \oplus\ominus \;\; \oplus\ominus$

$\Sigma p \neq \underline{0}$

(3) Orientierungspolarisation: molekulare, statistisch verteilte Dipole (in Flüssigkeiten)

$\underline{E} = 0$

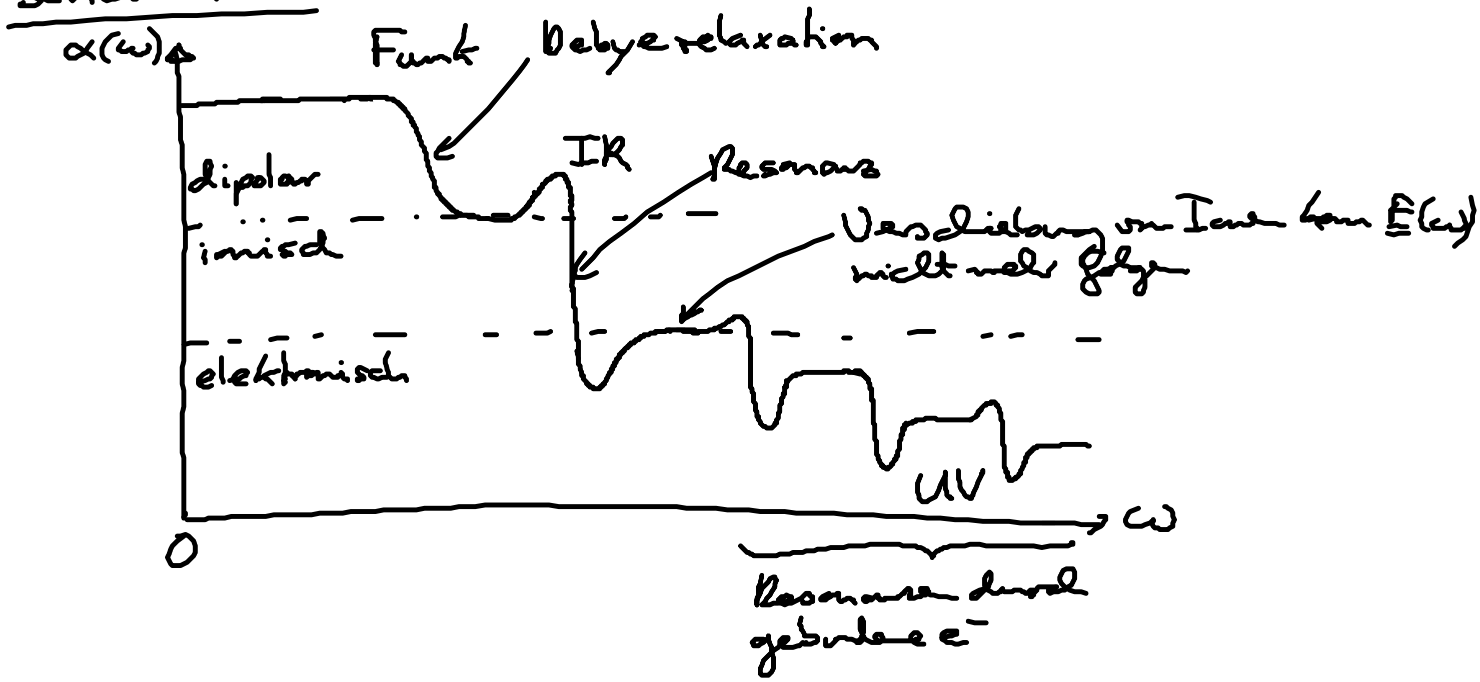
$\langle p \rangle = 0$

$\underline{E} \neq 0$

$\langle p \rangle \neq \underline{0}$

$\longrightarrow$ Beiträge zu $\alpha(\omega)$ im Frequenzraum:

<u>schematisch</u>



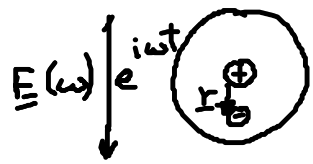
Idee: · verschiedene Beiträge haben verschiedene charakt. Frequenzen ω_c mit: $\omega_0 < \omega_I < \omega_e$

Orientierung

· $\omega \gg \omega_c$: kein Beitrag mehr

8.3.1 Lorentzmodell f_i = gebundene Elektronen

· klassisches Oszillatormodell:



e^- harmonisch gebunden an Kern ⊕
& Reibung & $\underline{E}(\omega)$

$$\longrightarrow \quad m\,(\underbrace{\ddot{\underline{r}} + \gamma\, \dot{\underline{r}}}_{} + \omega_0^2\, \underline{r}) = -e\, \underline{E}(\omega)\, e^{-i\omega t} \qquad (8.40)$$

Dämpfungskonstante γ Eigenfrequenz ω_0

· Lösung:

Ansatz: $\underline{r}(t) = \underline{r}(\omega)\, e^{-i\omega t}$ in (8.40) $\longrightarrow$ $\underline{r}(\omega)$

$$\longrightarrow \text{Dipolmoment: } \quad \underline{p}(t) = \underline{p}(\omega)\, e^{-i\omega t} = -e\, \underbrace{\underline{r}(\omega)\, e^{-i\omega t}}_{\underline{r}(t)} \qquad (8.41)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{p}(\omega) = -e\, \underline{r}(\omega) = \underbrace{\frac{e^2}{m}\, \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}}_{\varepsilon_0 \alpha(\omega)}\, \underline{E}(\omega)} \qquad (8.42)$$

· Verallgemeinerung:

f_i e^- mit ω_i, γ_i

$\longrightarrow$ relative Permeabilität

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 + \underbrace{N \alpha(\omega)}_{\chi(\omega)} = 1 + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}} \qquad (8.43)$$

... Drudesche Formel

NB. (1) f_i ... Oszillatorstärke, $\sum_i f_i = Z$ ... Kernladungszahl

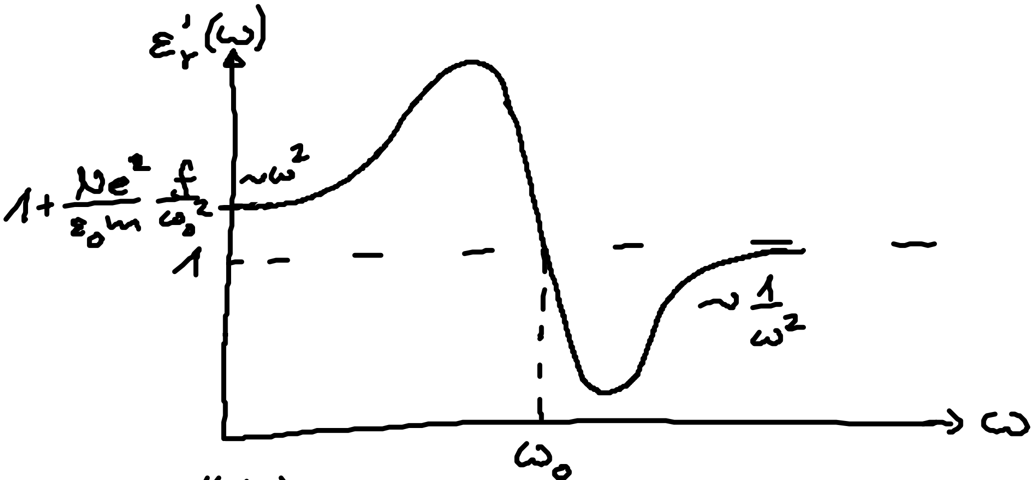
(2) ω_i, γ_i, f_i sind über QM definierbar!

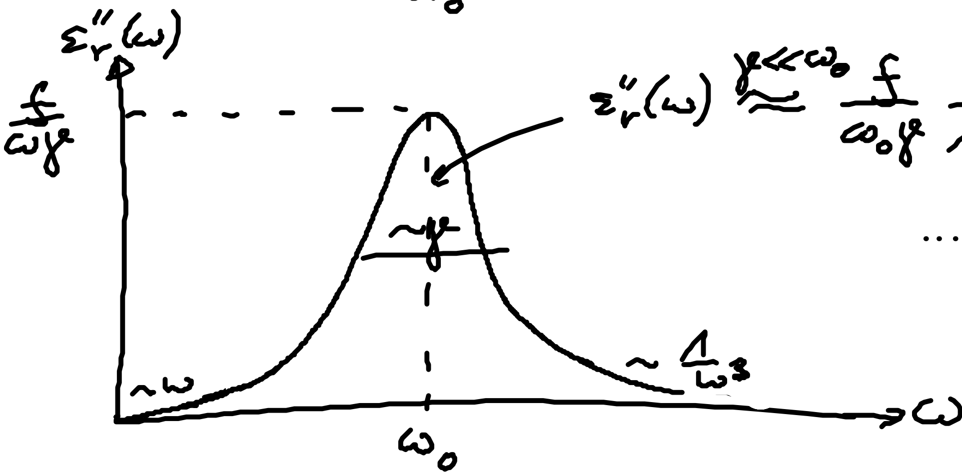
· Diskussion:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) &= \varepsilon_r'(\omega) + i\,\varepsilon_r''(\omega) \\ \text{mit}\quad \varepsilon_r'(\omega) &= 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_i f_i \frac{\omega_i^2-\omega^2}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2} \\ \varepsilon_r''(\omega) &= \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_i f_i \frac{\omega\gamma_i}{(\omega_i^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma_i^2} \end{aligned}} \quad (8.44)$$

Skizze: für ein $\omega_i=\omega_0$, $\gamma_i=\gamma$, $f_i=f$

typischerweise $\gamma_i \ll \omega_i$





$$\varepsilon_r''(\omega) \overset{\gamma\ll\omega_0}{\approx} \frac{f}{\omega_0\gamma}\,\frac{1}{1+\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma}\right)^2} \quad (8.45)$$

... Lorentzkurve

N.B. (1) bei ω_0: $\varepsilon'(\omega)$ zeigt Resonanz

$\varepsilon''(\omega)$ " Resonanzabsorption

sonst $\approx$ null

Kap. 6.3.1: $\varepsilon''(\omega)$ beschreibt dissipierte Energie

(2) normale Dispersion: $\frac{d\varepsilon'(\omega)}{d\omega} > 0$

anomale " $\frac{d\varepsilon'(\omega)}{d\omega} < 0$

(3) Niederfrequenzverhalten: $\omega_i \neq 0$

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} + O(\omega^2)} \quad (8.46)$$

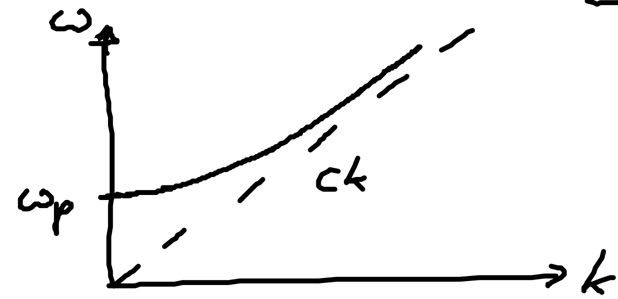
(4) Hochfrequenzlimes: $\omega \gg \omega_i$ $\qquad \sum_i f_i = Z\,!$

$$\boxed{\varepsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{Z N e^2}{\varepsilon_0 m}} \quad (8.47)$$

... Plasmafrequenz

Dispersionsrelation f= em Welle: $\bar{n} = \sqrt{\varepsilon_r}$

$$kc = \omega \bar{n} = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \longrightarrow \boxed{\omega = \pm\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} \quad (8.48)$$



(i) dielektr. Medien: (8.47) gilt f= $\omega \gg \omega_p$

(ii) Elektronengasplasma geringer Dichte:

(8.47) gilt auch f= $\omega < \omega_p \longrightarrow \varepsilon_r(\omega) < 0$

$$\longrightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}\bar{n} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} = i\,\xi^{-1}} \quad (8.49)$$

... em Welle rein gedämpft

(iii) ebenso: Leitungselektronen von Metallen:

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m^*}}$$

effektive e^--Masse im Leitungsband

$\omega < \omega_p$: Metall reflektiert!

$\omega > \omega_p$: " durchlässig im UV

- Zusammenfassung: Wellenausbreitung

komplexe Wellenzahl: $k = \frac{\omega}{c}\bar{n}$

" Brechungsindex: $$\boxed{\bar{n} = \sqrt{\varepsilon_r} = n(\omega) + i\kappa(\omega)} \quad (8.51)$$

mit
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r' &= n^2 - \kappa^2 \\ \varepsilon_r'' &= 2\kappa n \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} n^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_r' + \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2}\right) \\ \kappa^2 &= -\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_r' - \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2}\right) \end{aligned}\right.$$

insbes.: $$\boxed{n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r'} \quad \text{für} \quad \varepsilon_r'' = 0}$$

Bsp. H_2O [→ Folie]