

8.3.2 Beitrag freier Elektronen

• im Festkörper:

pro Atom: ein freies e^- im Leitungsband

→ endliche Leitfähigkeit $G(\omega)$

→ Interpretation als $\epsilon(\omega)$

• Stromdichte:

$$\underline{j}(\underline{r}, t) \stackrel{(8.53)}{=} \int(\underline{r}, t) \underline{v}(\underline{r}, t) = -e n_e(\underline{r}, t) \underline{v}(\underline{r}, t) \quad (8.53)$$

↑
Anzahldichte
der e^-

• Ohmsches Gesetz:

$$\underline{j} = G \underline{E} \quad (8.54)$$

Theorie $f = G$!?

• Drudemodell für freies e^- :

$$m \left(\underline{\dot{v}} + \frac{1}{\tau} \underline{v} \right) = -e \underline{E} \quad (8.55)$$

↑
effektive Masse
der e^- [s. 8.3.1]

↑
Kraft durch \underline{E}

↑
, Reibung' aufgrund: Stöße mit anderen e^- ,
Phononen (Gitterschwingung),
Defekte!

→ τ ... mittlere stoßfreie Zeit



insbes.: $\underline{E} = 0$: $\underline{v} = v_0 e^{-t/\tau}$

NB. (P.55) wie gebundene e^- mit $\omega_i = 0!$

(P.55) $\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\rho_0}$ (P.53) $m \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{j} \right) = e^2 n_e \underline{E}(\mathbf{r},t)$ (P.57)

• Adiabatische Näherg: $\frac{d\mathbf{j}}{dt} \ll \frac{1}{\tau} \mathbf{j}$

→ $\mathbf{j} = \underline{G}_0 \underline{E}$, $\underline{G}_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m}$ (P.58)

... Leitfähigkeit

„stationärer Fall“

• harmonische Variation:

$\underline{E}(t) = \underline{E}(\omega) e^{-i\omega t} \rightarrow \mathbf{j}(t) = \mathbf{j}(\omega) e^{-i\omega t}$

in (P.57) →

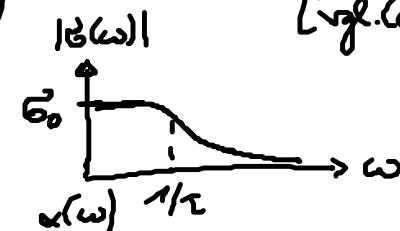
$\mathbf{j}(\omega) = \underline{G}(\omega) \underline{E}(\omega)$

mit $\underline{G}(\omega) = \frac{\underline{G}_0}{1 - i\omega\tau} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\frac{1}{2} - i\omega}$, $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$

... Plasmafrequenz
[vgl. (P.47)]

(i) Deutung: $\underline{G}(\omega) = |\underline{G}(\omega)| e^{-i\alpha(\omega)}$

mit $|\underline{G}(\omega)| = \frac{\underline{G}_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$
 $\alpha(\omega) = \arctan(\omega\tau)$



„j hinkt E hinterher“

(ii) Werte:

$\underline{G}_0(\text{Cu}) = 5.9 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega \text{m}}$

$\frac{1}{\tau} = 4 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{s}}$

→ $\omega \ll \frac{1}{\tau}$: $\underline{G}(\omega) = \underline{G}_0$ (Mikrowellenbereich)

$\omega_p \approx 10^{16} \frac{1}{\text{s}}$ (UV)

• Deutung als $\varepsilon(\omega)$:

Ampere & Verschiebungsstrom: $\text{rot } \underline{H}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r}, t)$ (8.61)

$$\text{mit (1) } \left. \begin{array}{l} \underline{D}(\underline{r}, t) \\ \underline{H}(\underline{r}, t) \\ \underline{j}(\underline{r}, t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{D}(\underline{r}, \omega) \\ \underline{H}(\underline{r}, \omega) \\ \underline{j}(\underline{r}, \omega) \end{array} \right\} e^{-i\omega t}$$

$$(2) \underline{D}(\underline{r}, \omega) = \varepsilon_b(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

↑ geb. e^-

$$(3) \underline{j}(\underline{r}, \omega) = G(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

$$(8.61) \rightarrow \text{rot } \underline{H}(\underline{r}, \omega) = -i\omega \left[\varepsilon_b(\omega) - \frac{G(\omega)}{i\omega} \right] \underline{E}(\underline{r}, \omega) \quad (8.62)$$

$\varepsilon(\omega)$... effektive Dielektrizitätskonstante

NB: harm. Felder: freie & geb. Ladungen verhalten sich ähnlich

$$(1) \frac{G(\omega)}{i\omega} \xrightarrow{\text{Beitrag zu}} \varepsilon(\omega)$$

$$(2) -i\omega \varepsilon(\omega) \longrightarrow G(\omega)$$

$$(3) \frac{\varepsilon_G(\omega)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{G(\omega)}{i\omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\frac{1}{T})} \quad (8.63)$$

• Diskussion: $\varepsilon_r(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_b(\omega) \approx \text{konst.}$

$$(1) \omega \ll \frac{1}{T} : \varepsilon_r(\omega) = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} + i \frac{G_0}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_0} \longrightarrow \text{gedämpfte Welle: Skin Effekt}$$

$$(2) \omega \gg \frac{1}{T} : \varepsilon_r(\omega) = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \left[\text{s. 8.3.1} \right]$$

$\omega < \omega_p$: Reflexion im SI
 $\omega > \omega_p$: Transparenz im UV

8.3.3 Kramers-Kronig-Relation

- Wirkhalte: lineare Beziehung: $\underline{P} \leftrightarrow \underline{E} \leftrightarrow \underline{D}$

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\varepsilon_r} \underline{E} \quad (8.53)$$

- allgemeinste lineare Beziehung:

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \underline{E}(t') dt' \quad (8.54)$$

„Abhängigkeit von anderer Zeit!“

Kausalität: $\chi(t-t') = 0$ für $t < t'$
 $\chi(t-t') \neq 0$ für $t > t'$

„Wirkung $\underline{P}(t)$ kommt nach der Ursache $\underline{E}(t')$ in der Vergangenheit ($t' < t$)!“

- Fallts Rechen:
Fouriertrafo:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8.55)$$

↑
gleiches Symbol

für $\underline{P}, \chi, \underline{E}$

(8.64):

$$\underline{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}(\omega) \quad (8.66)$$

$$\underline{D}(\omega) = \varepsilon_0 \underbrace{[1 + \chi(\omega)]}_{\varepsilon_r(\omega)} \underline{E}(\omega)$$

... „lokale Beziehung im Frequenzraum!“

- Eigenschaften von $\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) + i\varepsilon_r''(\omega)$

$$\chi(t-t'), \varepsilon_r(t-t') \in \mathbb{R} \leftrightarrow$$

\leftrightarrow

$$\varepsilon_r(-\omega) = \varepsilon_r^*(\omega) \quad (8.67)$$

$$\varepsilon_r'(-\omega) = \varepsilon_r'(\omega)$$

$$\varepsilon_r''(-\omega) = -\varepsilon_r''(\omega)$$

... gerade

... ungerade

Kramers-Kronig:

$$\boxed{\text{Kausalität} \longrightarrow \varepsilon_r'(\omega) \leftrightarrow \varepsilon_r''(\omega)}$$

„sind nicht unabh. voneinander!“

• Herleitung:

(i) Fortschreiben ins Komplexe: z ... komplexe Frequenz

Definiere: $\varepsilon_r(z) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tiz} [\varepsilon_r(t) - 1] dt$

Kausalität = $\int_0^{\infty} e^{tiz} [\varepsilon_r(t) - 1] dt, \text{Im} z \geq 0$

$z = \text{Re} z + i \text{Im} z$

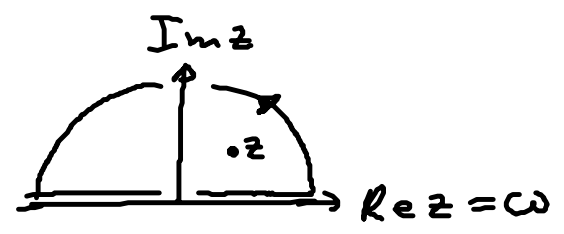
(ii) andere Darstellung:

$$\boxed{\varepsilon_r(z) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - z}} \quad (8.70)$$

Grd: Cauchy'sche Integralformel für analytisches $f(z)$

$$f(z) = \oint \frac{dz'}{2\pi i} \frac{f(z')}{z' - z}$$

Weg um z



hier:

$$\varepsilon_r(z) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \dots + \int \frac{dz'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(z') - 1}{z' - z}$$

mit $|z'| \rightarrow \infty$ $= 0$, falls $\varepsilon_r(z') - 1 \approx \varepsilon_r(\omega') - 1 \sim \frac{1}{|\omega|^s}$

(iii) Antwort: $z = \omega + i\varepsilon$

$$\rightarrow \varepsilon_r(\omega) - 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \quad (8.71)$$

$$f = |\omega| \rightarrow \infty$$

mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + \pi i \delta(x) \quad (8.72)$

(8.72) mit Hauptwert: $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \dots dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \dots dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \dots dx$