

### 8.3.3 Kramers-Kronig-Relation

$$\varepsilon_r(z) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} [\varepsilon_r(t) - 1] dt, \quad \text{Im} z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_r(z) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - z}} \quad (8.70)$$

(iii) Auswertung:  $z = \omega + i\varepsilon$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\rightarrow \varepsilon_r(\omega) - 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \quad (8.71)$$

$$\text{mit } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x + i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + \pi i \delta(x)$$

mit Hauptwert:  $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \dots dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \dots dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \dots dx$

$$\xrightarrow{x = \omega' - \omega} \varepsilon_r(\omega) - 1 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} [\varepsilon_r(\omega) - 1]$$

$$\rightarrow \varepsilon_r(\omega) - 1 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi i} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \quad (8.73)$$

Real- & Imaginärteil:  $\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r'(\omega) + i \varepsilon_r''(\omega)$

$$\boxed{\varepsilon_r'(\omega) - 1 = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\varepsilon_r''(\omega')}{\omega' - \omega}} \quad (a) \quad (8.74)$$

$$\boxed{\varepsilon_r''(\omega) = -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\varepsilon_r'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}} \quad (b)$$

... Kramers-Kronig-Relationen

(iv) Umkehrung: wegen  $\epsilon_r'(-\omega) = \epsilon_r'(\omega)$   
 $\epsilon_r''(-\omega) = -\epsilon_r''(\omega)$

(8.74)  $\rightarrow$  

$$\epsilon_r'(\omega) - 1 = 2P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\omega' \epsilon_r''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

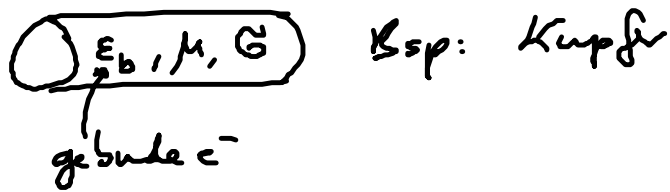
$$\epsilon_r''(\omega) = -2\omega P \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\epsilon_r'(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}$$
 (8.75)

... nur  $\omega > 0$  nötig  
 $\rightarrow$  gut für Exp./Simulation

- Diskussion: (1) Relation zwischen  $\epsilon_r'(\omega) \leftrightarrow \epsilon_r''(\omega)$   
 Grund: Kausalität
- (2) Messe Absorption  $\rightarrow \epsilon_r''(\omega) \xrightarrow{(8.75)} \epsilon_r'(\omega)$   
 " " Brechung  $\rightarrow \epsilon_r'(\omega) \rightarrow \epsilon_r''(\omega)$
- (3) Anwendung auf alle physikal. Prozesse  
 mit linearer Antwort

### 8.4 Elektromagnetische Wellen in leitfähigen Medien: Skin-Effekt

• Motivation: Ausbreitung von em. Wellen in Kabeln



• Telegraphengl.:

Maxwellgl.:  $\text{div } \underline{E} = 0$   
 $\text{div } \underline{B} = 0$   
 $\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$   
 $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underbrace{\underline{j}}_{\downarrow} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}, \quad \underline{c} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_b \mu_r}}$

wie in Kap. 8.1:  $\text{rot rot } \underline{E} = -\nabla^2 \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right)$

$$\rightarrow \boxed{(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t}) \underline{E}(r, t) = 0} \quad (8.76)$$

... Telegraphengleichung

analog für  $\underline{B}$ !

• Ebene-Welle-Lsg.:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \text{ in (8.76)}$$

$$\rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega\mu_0\sigma = 0$$

$$\rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \epsilon_r} \text{ mit } \epsilon_r = \epsilon_{br} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{i\omega} \quad (8.77)$$

... komplexes  $\epsilon_r$

• Diskussion:

$$\epsilon_{br} = \text{konst}, \mu_r = 1$$

$$- \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{i\omega} = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_0}{i\omega(1-i\omega\tau)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{br} = \text{konst}, \mu_r = 1 \\ - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{i\omega} = - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_0}{i\omega(1-i\omega\tau)} \end{array} \right\} \omega \ll \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\epsilon_r = \epsilon_{br} + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}} \quad (8.78)$$

$$\rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c} \bar{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}} \quad (8.79)$$

... komplexes  $\bar{n}$

exp. Werte:  $\epsilon_{br} = O(1)$ ,  $\omega = 10^9 \frac{1}{s}$ ,  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$   
 (Mikrowelle)  $\sigma_0 = 6 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega m}$

$$\rightarrow \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \approx 10^{10} \gg \epsilon_{br}$$

$$(8.79) \text{ \& } (8.78) \rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c} \sqrt{i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega}} = (1+i) \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma_0 \omega}{2\epsilon_0}} = (1+i) \zeta^{-1}} \quad (8.80)$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)$$

$$\text{mit } \boxed{\zeta^{-1} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma_0 \omega}{2\epsilon_0}}} \quad (8.81)$$

$\zeta$  ... Eindringtiefe der Welle ins Metall = Skinneffekt

Grd:  $e^{ikz} = e^{(i-1)z/\delta}$  ... Abfall auf Länge  $\delta$ !

mit exp. Werte (s.o.):  $\delta \approx 10^{-6} \text{ m}$ !

• Bsp:



→ Strom fließt nur durch dicke Schicht  
= Skin effect

→ verwende versilberte Cu-Drähte  
Silber: höhere Leitfähigkeit!

## 9. Elektromagnetische Felder bei vorgegebenen Ladungen & Strömen

• Bisher: ebene em Welle ohne Berücksichtigung von Quelle

- Ziel: (1) allg. Lösungsstrategie für  $\underline{A}, \underline{\varphi}$ , wenn  $\underline{g}, \underline{j}$  bekannt  
↔ Greensche Funktion ↔ retardierte Potentiale
- (2) Felder & Strahlung eines elektr. Dipols (→ Abstrahlung von em Wellen)
- (3) Felder einer bewegten Punktladung (→ Synchrotron-Strahlung)

### 9.1 Die retardierten Potentiale

• skalare & Vektorpotential in Lorentzoidg:

(1) Wellenoperator:  $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  (7.57)

(2) Wellenglm:

(7.82)  $\left. \begin{aligned} \square \varphi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} &4\text{er Potential } A = \begin{pmatrix} \varphi \\ \underline{A} \end{pmatrix} \\ &4\text{er-Strom } j = \begin{pmatrix} \rho \\ \underline{j} \end{pmatrix} \end{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \square A^\alpha &= -\mu_0 j^\alpha \end{aligned} \right. \quad (7.83)$

• (7.85) = lineare Dgl.  $\leftrightarrow$  Methode der Green'schen Fkt.:

$A^\alpha(\underline{r}, t) = \int d^3r' dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') (-\mu_0) j^\alpha(\underline{r}', t')$  (9.1)

$\hookrightarrow$  ... Green'sche Fkt. der Wellengl.

$\rightarrow A^\alpha(\underline{r}, t)$  für beliebiges  $\rho, j$

NB: kausale Beziehung:  $j^\alpha(\underline{r}', t') \rightarrow A^\alpha(\underline{r}, t)$  mit  $t' < t$

$\rightarrow G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0$  für  $t-t' < 0$

... kausale / retrodizierte Green'sche Fkt.

Bilde:  $\square$  (9.1)

$\rightarrow \square A^\alpha(\underline{r}, t) = \int d^3r' dt' \square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') (-\mu_0) j^\alpha(\underline{r}', t') \stackrel{!}{=} -\mu_0 j^\alpha(\underline{r}, t)$

$\rightarrow \square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \delta(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$  (9.3)

... Bestimmungsgl. für G!

• Berechnung von G aus (9.3):

(i) Lösung im reziproken Raum  $(\underline{k}, \omega)$ :  $\underline{r}-\underline{r}' \rightarrow \underline{r}, t-t' \rightarrow t$

Fourieransatz:  $G(\underline{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} G(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$  in (9.3)

$\rightarrow (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G(\underline{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} (\frac{\omega^2}{c^2} - \underline{k}^2) G(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$   
 $= \delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

$e^{\dots} = \text{VONS}$   
im  $(r, t)$  Raum

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) G(k, \omega) = 1$$

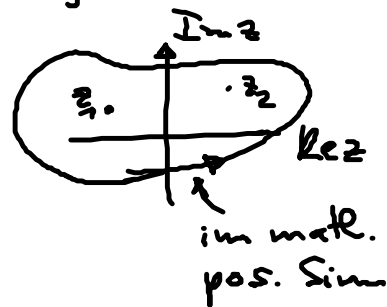
$$\rightarrow G(k, \omega) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \quad (9.4)$$

...  $G$  im reziproken Raum!

$$\rightarrow G(r, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{c^2}{\omega^2 - c^2 k^2} e^{i(k \cdot r - \omega t)} \quad (9.5)$$

(ii) Erinnerung: Integration im Komplexen  
& Cauchy'scher Residuensatz (einfache Pole)

$$\oint \frac{f(z)}{\underbrace{(z-z_1)(z-z_2)\dots}_{g(z)}} dz = 2\pi i \sum_n \underbrace{g(z)(z-z_n)}_{\text{"Summe der Residuen"}} \Big|_{z=z_n}$$



$z_i \dots$  Polstelle von  $g$

"Summe der Residuen"

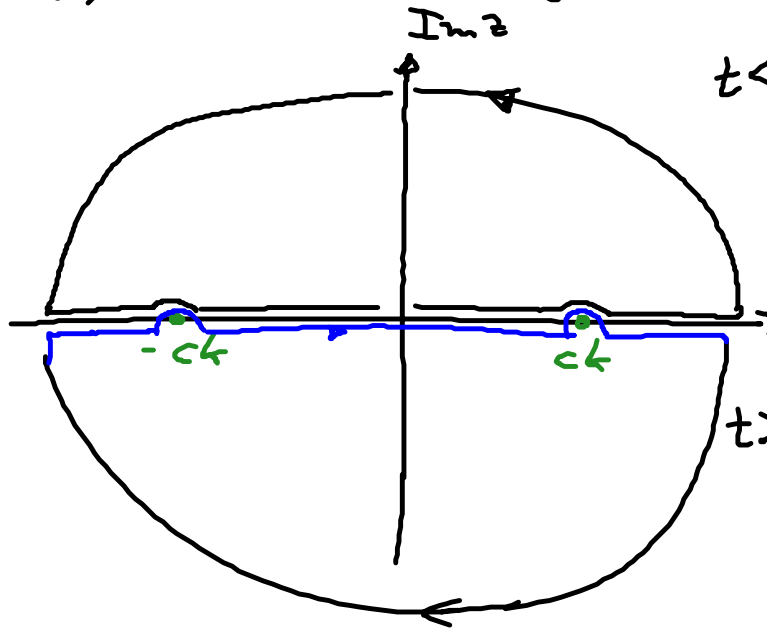
(iii) Anwendung auf  $\int \frac{d\omega}{2\pi} \dots$  in (9.5)

$$G(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{(\omega + ck)(\omega - ck)} \stackrel{!}{=} \oint \frac{dz}{2\pi} \frac{c^2 e^{-izt}}{(z + ck)(z - ck)} \quad (9.7)$$

Wähle geschlossenen Weg in  $\mathbb{C}$  so daß:

$$(1) G(k, t) = \begin{cases} = 0, & t < 0 \\ \neq 0, & t > 0 \end{cases}$$

(2) zusätzlicher Beitrag von  $G$  verschwindet



$t < 0$ :  $e^{-izt} \xrightarrow{\text{Im } z > 0} 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$   
auf  $\curvearrowright$

$\rightarrow$  keine Pole  
nicht mit!

$\rightarrow G = 0$

$t > 0$ :  $e^{-izt} \xrightarrow{\text{Im } z < 0} 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$   
auf  $\curvearrowleft$

$\rightarrow$  keine Pole mit  $G \neq 0!$

$$\frac{(9.7)}{(9.6)} \rightarrow G(k, t) = -2\pi i \frac{c^2}{2\pi} \left[ \frac{e^{ickt}}{-2ck} + \frac{e^{-ickt}}{2ck} \right] \quad (9.8)$$

$$\rightarrow G(k, t) = i \frac{c}{2k} (e^{ickt} - e^{-ickt}) = -\frac{c}{k} \sin(ckt), \quad t > 0$$