9.1 Die retardierten Potentiale

$\Box A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha \longrightarrow \boxed{A^\alpha(\underline{r},t) = \int d^3r\, dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')(-\mu_0)\, j^\alpha(\underline{r}',t')}$ (9.1)

mit $\boxed{\Box G(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = \delta(\underline{r}-\underline{r}',t-t')}$ (9.3)

$G(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = 0$ für $t-t'<0$! (9.2)

• Berechnung von G:

(i) Lösung im Fourier-Raum:

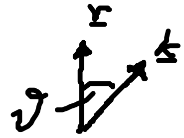
$$\boxed{G(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}} \quad (9.4)$$

(ii) ...

(iii) zeitliche Fouriertrafo: $\longrightarrow$ $G(\underline{k},t) = -\frac{c}{k}\sin(ckt)$, $t>0$ (9.8)

(iv) räumliche Fouriertrafo:

$$G(\underline{r},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, G(\underline{k},t)\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} = -c\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{k}\sin(ckt)\, e^{i\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r}}_{kr\cos\vartheta}}$$

in Polarkoord.:  & $d^3k = k^2\, dk\, d\cos\vartheta\, d\varphi$

& $\int\frac{d\varphi}{2\pi}1 = 1$

$$\longrightarrow G(r,t) = -c\,\frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\,\frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k}}\sin ckt\,\underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta\; e^{ikr\cos\vartheta}}_{2\frac{1}{i\cancel{k}r}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)}$$

$$\longrightarrow G(r,t) = -\frac{c}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\underbrace{\sin(ckt)\,\sin(kr)}_{\text{gerade in } k}$$

$$= -\frac{c}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{1}{2i}\left(e^{ickt}-e^{-ickt}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)$$

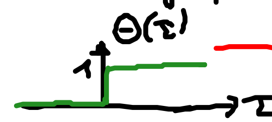
$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\left[e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)}\right]$$

$$\longrightarrow G(\underline{r},t) = \frac{\cancel{c}}{4\pi r}\left[\underbrace{\delta(r+ct)}_{=0,\ t>0} - \underbrace{\delta(r-ct)}_{\frac{1}{c}\delta(\frac{r}{c}-t) = \frac{1}{\cancel{c}}\delta(t-\frac{r}{c})}\right]$$

$$r \to |\underline{r}-\underline{r}'| \qquad t \to t-t'$$

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\,\Theta(t-t')\,\frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

$$\text{mit } \Theta(t-t') = \begin{cases} 1, & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad \text{... Stufe Fkt}$$



... kausale / retardierte Greensche Fkt.

<u>NB</u>: avancierte Greensche Fkt.: $G \sim \delta(r+ct)$!

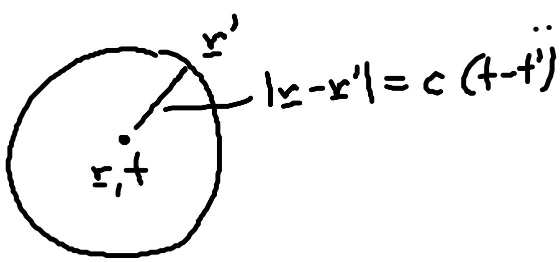
$\longrightarrow$ „Zukunft bedingt Gegenwart"

· Zeitintegration: in (9.1)

$$\longrightarrow A^\alpha(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\,(-\mu_0)\, j^\alpha(\underline{r}',t')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt'\; \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\mu_0\, j^\alpha(\underline{r}',t')$$

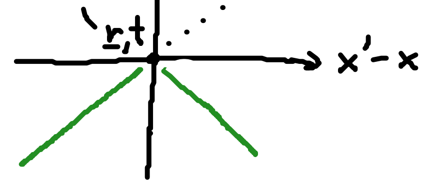
$$\longrightarrow \boxed{A^\alpha(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{j^\alpha(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad \text{mit } t_r = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}} \quad \text{... retardierte Zeit} \qquad (9.10)$$



.... nur Ladung/Ströme bei $\underline{r}'$ zur Zeit t' tragen zu $A^\alpha(\underline{r},t)$ bei, deren Wirkung in Zeit $\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ den Ort $\underline{r}$ erreichen

$\longleftrightarrow$ Wirkung breitet sich mit c aus!

$\longleftrightarrow$ Ursache liegen <u>auf</u> Rückwärts-Lichtkegel von $\underline{r}$ $\quad c(t'-t)$



- retardierte Potentiale: $A^\alpha \to \varphi, \underline{A}$, $j^\alpha \to \rho, \underline{j}$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\underline{j}(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\end{aligned}} \qquad (9.11)$$

$\longrightarrow$ $$\boxed{\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}\,, \quad \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}} \qquad (9.12)$$

$\longrightarrow$ allg. Lsg. der Maxwell-Gln.

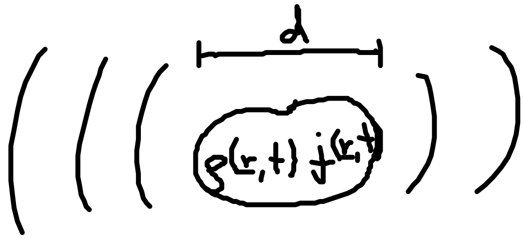
9.2 Felder & Strahlung eines oszillierenden elektr. Dipols

- Ziel: Abstrahlung von em Wellen eines elektr. Dipols = elektr. Hertzscher Dipol
  - $\longrightarrow$ Radiowellen
  - $\longrightarrow$ Lichtstreuung

9.2.1 Allgemeine Problemstellung

- lokalisierte, oszillierende Quellen:

(i)



$$\left.\begin{aligned}\underline{A}(\underline{r},t)\\ \varphi(\underline{r},t)\end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t)\end{aligned}\right.$$

außerhalb Quellen

(ii) (9.13)
$$\left.\begin{aligned}\rho(\underline{r},t) &= \rho(\underline{r})\,e^{-i\omega t}\\ \underline{j}(\underline{r},t) &= \underline{j}(\underline{r})\,e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\}$$

verknüpft über

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0$$

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{-i\omega\rho(\underline{r}) + \mathrm{div}\,\underline{j}(\underline{r}) = 0} \qquad (9.14)$$

$\longrightarrow$ Beschränkung auf

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}, \quad t_r = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \qquad (9.11)$$

- oszillierendes $\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})e^{-i\omega t}$

(1) wegen $\underline{j}(\underline{r}',t_r) \overset{(9.13)}{=} \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t_r} \overset{(9.11)}{=} \underline{j}(\underline{r}')e^{-i\omega t} e^{+i\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k}|\underline{r}-\underline{r}'|}$

(2) also:

$$(9.11) \qquad \boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}} \qquad (9.15)$$

ebenso: $\begin{pmatrix}\underline{E}(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{E}(\underline{r})\\ \underline{B}(\underline{r})\end{pmatrix} e^{-i\omega t}$ mit

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \nabla\times\underline{A}(\underline{r}) \longrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = i\frac{c}{k}\nabla\times\underline{B}} \qquad (9.16)$$

außerhalb Quellen

$$\nabla\times\underline{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\underline{E}(\underline{r}) = -i\frac{k}{c}\underline{E}(\underline{r})$$

- Diskussion von (9.15): nach Raumgebieten, $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}}$

sei $d \ll \lambda$

(i) Nahzone: $d < r \ll \lambda$

$\xrightarrow{\text{in (9.15)}} k|\underline{r}-\underline{r}'| \ll 1 \longrightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (5.19)$

... Nahfelder sind quasistationär!
(5.19) aus Magnetostatik

(ii) Zwischenzone: $d \ll r \approx \lambda$

komplexes Verhalten

(iii) Fernzone: $d \ll \lambda \ll r$

in (9.15) (1) $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{r}$

(2) $|\underline{r}-\underline{r}'| \approx r - \underline{e}_r\cdot\underline{r}'$ mit $\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}$ $\Bigg\}$ in (9.15)

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\,\underbrace{e^{-ik\,\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}}_{\underset{d\ll\lambda}{\approx} 1 - ik\,\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}} \quad (9.17)$$

auslaufende Kugelwelle!

$\longrightarrow$ Strommomente!

<u>NB</u>: Ausdruck für Fernzone gilt <u>immer</u> für punktförmige Stromverteilungen: $\underline{j}(\underline{r}) \sim \delta(\underline{r})$ & Momente

- statt systematischer Multipolentwicklung für (9.15), nun ...

9.2.2 <u>Elektrischer Hertzscher Dipol</u>

- erster Term in (9.17) $\longleftrightarrow$ elektr. Dipol

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' \quad (9.18)$$

- Hertzscher elektr. Dipol:

$$\int \underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' = \int \underbrace{\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underline{\nabla}'}_{j_i\nabla_i}\,\underline{r}'\,d^3r' \overset{\text{part. Integ.}}{=\!=} -\int \underline{r}'\,\underline{\nabla}\cdot\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r'$$

$$(-i\omega\rho + \operatorname{div} j = 0) \longrightarrow \text{Kont.gl.} \overset{(9.14)}{=} -i\omega\int \underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,d^3r'$$

$$\boxed{\int \underline{j}(\underline{r})\,d^3r = -i\omega\,\underline{p} = -i\omega\int \underline{r}\,\rho(\underline{r})\,d^3r} \quad (9.19)$$

... elektr. Dipolmoment der oszillierenden Stromverteilung

$$\longrightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\,\underline{p}\,\frac{e^{ikr}}{r}} \quad (9.20)$$

NB: (9.20) ist exakt für Punktdipol mit Polarisation $\underline{P}(\underline{r},t) = \underline{p}\,\delta(\underline{r})\,e^{-i\omega t}$

• em Feld: (9.16) & $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{A} \longrightarrow \boxed{\underline{H}(\underline{r}) = \frac{c}{4\pi}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\underline{e}_r\times\underline{p}}$$

$$\underline{E} = i\frac{c}{k}\underline{\nabla}\times\mu_0\underline{H} \longrightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\Big[k^2(\underline{e}_r\times\underline{p})\times\underline{e}_r + \frac{1}{r^2}(1-ikr)\cdot(3(\underline{p}\cdot\underline{e}_r)\underline{e}_r-\underline{p})\Big]} \quad (9.21)$$