English Summary:

1. Stochastic Processes

1.1 Random variables $X : \tilde{M} \longrightarrow M$

event — realisation

(i) M = sample set (complete set of disjoint events $\{A_1, \dots, A_n\}$)

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S \qquad A_i \cap A_j = A_i \delta_{ij}$$

$\subseteq$ Boolean algebra $\mathcal{A}$ (Boolean lattice): union $\cup$, intersection $\cap$, inclusion $\subseteq$

(ii) Probability $P : \mathcal{A} \to [0,1]$

Conditional probability $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ joint probability

A_1, A_2 uncorrelated $\Leftrightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

continuous events: probability density fct. (PDF) $\rho(x)$

$x \in \mathbb{R}^d$: normaliz. $\int d^dx\, \rho(x) = 1$, mean value $\langle x \rangle = \int d^dx\, \rho(x)\, x$

x_1, x_2 uncorrelated $\Leftrightarrow \rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\, \rho_2(x_2)$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle}$$

Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

ν-te Moment $\quad M_\nu := \langle x^\nu \rangle$

Momentenerzeugende (charakt. Fkt.) $\quad Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M_\nu$$

Kenntnis aller Momente ist äquivalent zur Wahrscheinl.verteilung

$\alpha \equiv is$: Fourier-Inverse von $Z(is) = \int dx\, \rho(x)\, e^{isx}$

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int ds\, Z(is)\, e^{-ixs}$$

Verallg. auf d Zufallsvar.:

$M_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d} \rangle \quad$ Momente der Ordnung $\nu := \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d$

Momentenerzeugende $\quad Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\,\underline{x}} \rangle = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \dfrac{\alpha_1^{\nu_1} \dots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \dots \nu_d!} M_{\nu_1 \dots \nu_d}$

$$\underline{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

<u>Kumulante</u> $C_{\nu_1 \ldots \nu_d} = \langle x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d} \rangle_c$ ist definiert durch die

<u>Kumulantenerzeugende</u> $\Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\underline{\alpha}\underline{x}} \rangle = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_d} \frac{\alpha_1^{\nu_1} \cdots \alpha_d^{\nu_d}}{\nu_1! \cdots \nu_d!} C_{\nu_1 \ldots \nu_d}$

<u>Eigenschaft</u>:

Kumulanten sind <u>additiv</u> für <u>unkorrelierte</u> Zufallsvar.

(gilt nicht für Momente !! $\langle (x_1+x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle + 2\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$)

<u>Beweis</u>: Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha}\underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2\, \rho(x_1) \rho(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$
$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle + \ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle \overset{!}{=} \Gamma(\alpha_1) + \Gamma(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha : \Gamma(\alpha, \alpha) = \ln \langle e^{\alpha \underbrace{(x_1 + x_2)}_{x}} \rangle = \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle (x_1+x_2)^\nu \rangle_c$$
$$= \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle x_1^\nu \rangle_c + \sum_\nu \frac{\alpha^\nu}{\nu!} \langle x_2^\nu \rangle_c$$

$$\Rightarrow \langle (x_1+x_2)^\nu \rangle_c = \langle x_1^\nu \rangle_c + \langle x_2^\nu \rangle_c$$

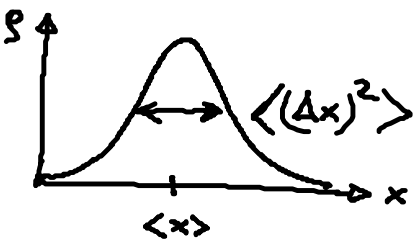
□

<u>Fluktuation</u> $\Delta x := x - \langle x \rangle$

Es gilt $\langle \Delta x \rangle = 0$

<u>Varianz</u>: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$
$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Maß für die Breite einer Verteilung



<u>Korrelationsmatrix</u> (Kovarianzmatrix)

$$\langle \Delta x_k \Delta x_\ell \rangle = \langle x_k x_\ell \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_\ell \rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für <u>unkorr.</u> Zufallsvar.!

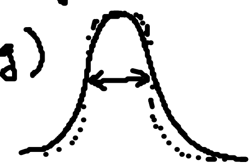
Zusammenhang zwischen Kumulanten u. Momenten:

$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$ mean

$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle$ variance (Breite)

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$ skewness (Schiefe: Maß für Asymmetrie)

$\langle x^4 \rangle_c = \langle (\Delta x)^4 \rangle - 3 (\langle \Delta x^2 \rangle)^2$ kurtosis (Wölbung)



Zentraler Grenzwertsatz:

Seien $X_1, \dots, X_n$ unkorrelierte Zufallsvar. mit $\langle X_i \rangle = 0$, $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle = b_i^2$

(z.B. random walk = Brown'sche Bewegung mit Zeitschritt n)

Dann konvergiert die Verteilung für $n \to \infty$ gegen

Gaußverteilung $\quad \rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \sigma^2 = \sum_i b_i^2$

(Normalverteilung)

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle_c \,, \quad \langle x^k \rangle_c = 0 \quad \text{für } k > 2$$

1.2 Markov-Prozesse

Stochastischer Prozess:

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

zeitabhängige Verbundwahrscheinl. $p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3; \dots)$

mit Realisierungen $x_1, x_2, x_3, \dots$ von $X(t)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(x_1,t_1 | x_2,t_2; x_3,t_3; \dots) = \frac{p(x_1,t_1; x_2,t_2; \dots)}{p(x_2,t_2; x_3,t_3; \dots)}$$

$(t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots)$

Markov-Prozess:

$$p(x_1,t_1 | x_2,t_2; x_3,t_3; \dots) = p(x_1,t_1 | \underline{x_2,t_2})$$

nicht die ganze Vergangenheit $(t_2, t_3, t_4 \dots)$

bestimmt die Zukunft (t_1), sondern nur die Gegenwart (t_2)

$\longrightarrow$ stochast. Prozess „ohne Gedächtnis"

also: $p(x_1,t_1; x_2,t_2; x_3,t_3, \dots) = p(x_1,t_1 | \underline{x_2,t_2})\, p(x_2,t_2; x_3,t_3; \dots$

$$= p(x_1,t_1 | \underline{x_2,t_2})\, p(x_2,t_2 | x_3,t_3)\, p(x_3,t_3; \dots)$$

$$= p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2|x_3,t_3)\cdots p(x_{n-1},t_{n-1}|x_n,t_n)\,p(x_n,t_n)$$

$$t_1 \Leftarrow t_2 \Leftarrow t_3 \cdots \Leftarrow t_{n-1} \Leftarrow t_n$$

(Markov-Kette)

Für Verbundwahrscheinl. unkorrelierter Ereignisse gilt:

$$\sum_B P(A\cap B\cap C) = \underbrace{\sum_B P(B)}_{1} P(A\cap C) = P(A\cap C)$$

Also gilt immer (auch nicht-Markov):

$$p(x_1,t_1) = \int dx_2\, p(x_1,t_1;x_2,t_2)$$

$$\overset{\text{(Def. bed. W.)}}{=} \int dx_2\, p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2)$$

kurz: $p(1) = \int dx_2\, p(1|2)\,p(2)$ (1)

$$p(1|3) = \int dx_2\, p(1;2|3)$$

$$= \int dx_2 \frac{p(1;2;3)}{p(3)} = \int dx_2 \frac{p(1;2;3)}{p(2;3)}\frac{p(2;3)}{p(3)}$$

$$= \int dx_2\, p(1|2;3)\,p(2|3) \quad (2)$$

Markov-Annahme: $p(1|2;3) = p(1|2)$

$$\Rightarrow p(1|3) = \int dx_2\, p(1|2)\,p(2|3) \quad (3)$$

$$\boxed{p(x_1,t_1|x_3,t_3) = \int dx_2\, p(x_1,t_1|x_2,t_2)\,p(x_2,t_2|x_3,t_3)}$$

<u>Chapman-Kolmogorov-Gleichung</u>

(Funktionalgl. für bedingte Wahrscheinl.)

diskrete Ereignisse:

$$P(n_1,t_1|n_3,t_3) = \sum_{n_2} P(n_1,t_1|n_2,t_2)\,P(n_2,t_2|n_3,t_3)$$

<u>stationärer</u> stoch. Prozess:

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2;x_3,t_3;\dots) = p(x_1,t_1+\varepsilon;x_2,t_2+\varepsilon;x_3,t_3+\varepsilon;\dots)$$

(Zeittranslationsinvarianz)

$\Rightarrow$ $p(x,t) = p(x)$ zeitunabh. ($\Rightarrow \langle x \rangle$ zeitunabh.)

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2) = p(x_1,t_1-t_2;x_2,0) \quad \circledast$$

$$p(x_1,t_1|x_2,t_2) = p(x_1,t_1-t_2|x_2,0)$$

(notw. + hinr. für stationären Markov-Prozess)

$\circledast$
$\Rightarrow$ Autokorrelationsfkt. $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle =: G(\tau) = G(-\tau)$