English Summary:

<u>Moments</u> of a probability distribution $M_\nu \equiv \langle x^\nu \rangle$

Moment generating function $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha X} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$

cumulant generating function $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha X} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} C_\nu$ $= \langle x^\nu \rangle_c$

$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$ mean

$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle$ variance

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$ skewness

covariance matrix $\langle \Delta x_k \Delta x_\ell \rangle$
(correlation)

<u>Stochastic process</u>: random variable $X(t)$ with probability $p(x_1, t_1;\ x_2, t_2;\ x_3, t_3;\ \dots)$

<u>Markov process</u>: $p(x_1, t_1 \mid x_2, t_2;\ x_3, t_3;\ \dots) = p(x_1, t_1 \mid x_2, t_2)$

<u>Chapman-Kolmogorov eq.</u> $p(1|3) = \int dx_2\, p(1|2)\, p(2,3)$

Ergodizität

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel $\overset{!}{=}$ Zeitmittel

Zeitmittel $\bar{X}(T) := \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)$, $T \to \infty$

$$\bar{X}(T) = \langle x \rangle$$

$\Rightarrow$ Berechnung der Autokorrelationsfkt. durch Zeitmittel:

$$G(\tau) := \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle \overset{!}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)\,x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften:

Fourier-Trafo $\hat{x}(\omega;T) := \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} dt\, e^{i\omega t}\, x(t)$

Es gilt $G(\tau) = G(-\tau)$

Spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

$$S(\omega) := \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T}\,|\hat{x}(\omega;T)|^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} dt'\, e^{i\omega\overbrace{(t-t')}^{-\tau}}\, x(t)\,\underbrace{x(t')}_{t+\tau}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int d\tau\, e^{-i\omega\tau}\,\underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)\,x(t+\tau)}_{G(\tau)}$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, G(\tau)}$$

Wiener-Khinchin-Theorem

Umkehrung:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau}\, S(\omega)$$

homogener stoch. Prozess:

$$\lim_{t\to\infty} p(x,t\,|\,x,0) = p(x)$$ (stationärer Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht)

1.3 Chapman – Kolmogorov – Gleichung

Aus der Chapman–Kolmogorov–Gl. (diskret in t)

$$p(x_1,t_1\,|\,x_3,t_3) = \int dx_2\; p(x_1,t_1\,|\,x_2,t_2)\; p(x_2,t_2\,|\,x_3,t_3)$$
$$t_1 \ge t_2 \ge t_3$$

lässt sich eine Diff.gl. für $p(x,t\,|\,x_0,t_0)$ ableiten:

Annahmen: für $\varepsilon > 0$

(i) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(x,t+\Delta t\,|\,z,t)}{\Delta t} = W(x\,|\,z,t)$$ gleichförmig in x, z, t für $|x-z| \ge \varepsilon$ (Sprünge)

<u>Übergangswahrscheinl. pro Zeiteinheit</u> $z \to x$

(ii) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z|<\varepsilon} dx\, (x_i - z_i)\, p(x,t+\Delta t\,|\,z,t) = A_i(z,t) + O(\varepsilon)$$ gleichförmig

(kontin. Übergänge)

(iii) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-z|<\varepsilon} dx\, (x_i - z_i)(x_j - z_j)\, p(x,t+\Delta t\,|\,z,t) = B_{ij}(z,t) + O(\varepsilon)$$ gleichförmig

alle höheren Momente verschwinden $O(\varepsilon)$!

- Betrachte $\frac{\partial}{\partial t} \int dx\, f(x)\, p(x,t\,|\,y,t')$ für bel. Fkt. $f(x)$

und leite daraus Dgl. für $\frac{\partial}{\partial t} p(x,t\,|\,y,t')$ ab:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx\, f(x)\, p(x,t\,|\,y,t')$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\{ \int dx\, f(x)\, \frac{[p(x,t+\Delta t\,|\,y,t') - p(x,t\,|\,y,t')]}{\Delta t} \right\}$$

Chapman–Kolm.

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \left\{ \int dx\, f(x)\, \frac{\int dz\, p(x,t+\Delta t\,|\,z,t)\, p(z,t\,|\,y,t') - p(x,t\,|\,y,t')}{\Delta t} \right\}$$

Umbenennen $x \to z$

Für $|x-z| < \varepsilon$:

Entwicklung $f(x) = f(z) + \sum_i \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}(x_i - z_i) + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j}(x_i - z_i)(x_j - z_j)$

$+ \text{Rest} \; (\to 0 \text{ für } |x-z| \to 0)$

Aufspaltung in Integrale $\int\limits_{|x-z|<\varepsilon}$ und $\int\limits_{|x-z|>\varepsilon}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dx\, f(x)\, p(x,t|y,t')$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \Big\{ \iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx\, dz \Big[\sum_i \underbrace{(x_i - z_i)}_{\boxed{A_i}\ (ii)} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{ij} \underbrace{\tfrac{1}{2}(x_i-z_i)(x_j-z_j)}_{(iii)\ \boxed{B_{ij}}} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') \Big]$$

gibt Beitrag für $\varepsilon \to 0$ ①

$$+ \iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} \underbrace{\text{höhere Mom.}}_{\searrow 0} + \iint\limits_{|x-z|<\varepsilon} dx\, dz\, f(z)\, p(\underbrace{x,t+\Delta t|z,t}_{\to 0})\, p(z,t|y,t')$$

$$+ \iint\limits_{|x-z|\geq \varepsilon} dx\, dz\, f(x)\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') \quad ②$$

Umbenennung $x \leftrightarrow z$

$$- \iint dx\, dz\, f(z)\, p(x,t+\Delta t|z,t)\, p(z,t|y,t') \Big\} \quad ③$$

$\int dx\, p(x,t+\Delta t|\dots) = 1$ eingefügt

(i) einsetzen $\boxed{W}$

② $\varepsilon \to 0$: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-z|>\varepsilon} dx$ = Hauptwertintegral (Annahme: existiert)

① partielle Integration

$$\int dz \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z)\right) A_i(z)\, p(z,t|\dots) = -\int dz\, f(z) \frac{\partial}{\partial z}\left(A_i(z)\, p(z,t|\dots)\right)$$

$+$ Randterme $(\to 0)$

$$\int dz \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} f(z)\right) B_{ij}(z)\, p(z,t|\dots) = + \int dz\, f(z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left[B_{ij}(z)\, p(z,t|\dots)\right]$$

$\Rightarrow \int dz\, f(z)\, [\dots] = 0$ für bel. $f(z)$

$[\dots] = 0$

Erg:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z,t|y,t') = -\sum \frac{\partial}{\partial z_i}\left[A_i(z,t)\, p(z,t|y,t')\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z,t|y,t') = -\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left[A_i(z,t)\, p(z,t|y,t')\right] \quad (1)$$

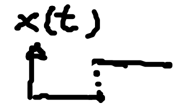
$$+ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left[B_{ij}(z,t)\, p(z,t|y,t')\right]$$

$$+ \int dx \left[\underbrace{W(z|x,t)\, p(x,t|y,t')}_{(2)} - \underbrace{W(x|z,t)\, p(z,t|y,t')}_{(3)}\right]$$

(differentielle Chapman–Kolmogórov–Gl.)

Anfangsbed. $p(z,t'|y,t') = \delta(y-z)$

(a) Spring–Prozesse (diskontinuierlich)



$$\frac{\partial}{\partial t} p(z,t|\ldots) = \int dx \left[W(z|x,t)\, p(x,t|\ldots) - W(x|z,t)\, p(z,t|\ldots)\right]$$

$$z \underset{W(x|z,t)}{\overset{W(z|x,t)}{\rightleftarrows}} \text{alle } x$$

$W(z|x,t)$: Einstrom–Übergangswahrsch. / Zeit

$W(x|z,t)$: Ausstrom–Übergangswahrsch. / Zeit

Mastergleichung (Bilanz rein – raus)