

English Summary:

Moments of a probability distribution $M_\nu \equiv \langle x^\nu \rangle$

Moment generating function $Z(x) = \langle e^{xX} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} M_\nu$

cumulant generating function $\Gamma(x) = \ln \langle e^{xX} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} C_\nu = \langle x^\nu \rangle_c$

$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$ mean

$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle$ variance

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$ skewness

covariance matrix $\langle \Delta x_k \Delta x_l \rangle$
(correlation)

Stochastic process: random variable $X(t)$ with probability
 $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

Markov process: $p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$

Chapman-Kolmogorov eq. $p(1|3) = \int dx_2 p(1|2)p(2,3)$

Ergodizität

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel $\stackrel{!}{=} \text{Zeitmittel}$

$$\text{Zeitmittel } \bar{X}(T) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t), \quad T \rightarrow \infty$$

$$\bar{X}(T) = \langle x \rangle$$

⇒ Berechnung der Autokorrelationsfkt. durch Zeitmittel:

$$G(\tau) := \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \stackrel{!}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften:

$$\text{Fourier-Transf. } \hat{x}(\omega; T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t)$$

$$\text{Es gilt } G(\tau) = G(-\tau)$$

Spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

$$\begin{aligned} S(\omega) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' e^{i\omega(t-t')} x(t)x(t') \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int d\tau e^{-i\omega\tau} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+\tau)}_{G(\tau)} \end{aligned}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$$

Wiener-Khinchin-Theorem

Umkehrung:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} S(\omega)$$

homogener stoch. Prozess:

$$x(t) = \sum_{\omega} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{mit } \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \hat{x}(\omega))$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t | x, 0) = p(x)$ (stationärer Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht)

1.3 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Aus der Chapman-Kolmogorov-Gl. (diskret in t)

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

$t_1 \geq t_2 \geq t_3$

lässt sich eine Diff. gl. für $p(x, t | x_0, t_0)$ ableiten:

Annahmen: für $\varepsilon > 0$

(i) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(x, t + \Delta t | z, t) - p(x, t | z, t)}{\Delta t} = W(x | z, t)$ gleichförmig in x, z, t
für $|x - z| \geq \varepsilon$
(Sprünge)

Übergangswahrscheinl. pro Zeiteinheit $z \rightarrow x$

(ii) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - z| < \varepsilon} dx (x_i - z_i) p(x, t + \Delta t | z, t) = A_i(z, t) + O(\varepsilon)$ gleichförmig
(kontin. Übergänge)

(iii) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x - z| < \varepsilon} dx (x_i - z_i)(x_j - z_j) p(x, t + \Delta t | z, t) = B_{ij}(z, t) + O(\varepsilon)$ gleichförmig

alle höheren Momente verschwinden $O(\varepsilon)$!

• Betrachte $\frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t')$ für bel. Fkt. $f(x)$

und leite daraus Dgl. für $\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | y, t')$ ab:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t') \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int dx f(x) \frac{[p(x, t + \Delta t | y, t') - p(x, t | y, t')]}{\Delta t} \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \int dx f(x) \frac{\int dz p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') - p(x, t | y, t')}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

↓
Umbenennen $x \rightarrow z$

Für $|x - z| < \varepsilon$

Entwicklung $f(x) = f(z) + \sum_i \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i)(x_j - z_j)$

+ Rest ($\rightarrow 0$ für $|x-z| \rightarrow 0$)

Anspaltung in Integrale $\int_{|x-z| < \epsilon}$ und $\int_{|x-z| > \epsilon}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx f(x) p(x, t | y, t')$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_{|x-z| < \epsilon} dx dz \left[\sum_i (x_i - z_i) \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{ij} \frac{1}{2} (x_i - z_i)(x_j - z_j) \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \right] p(z, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t') \right\}$$

A_i (ii) (iii) B_{ij} gibt Beitrag für $\epsilon \rightarrow 0$ (1)

+ $\iint_{|x-z| < \epsilon}$ höhere Mom. $\rightarrow 0$ + $\iint_{|x-z| < \epsilon} dx dz f(z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t')$ $\rightarrow 0$

+ $\iint_{|x-z| \geq \epsilon} dx dz f(x) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t')$ (2) Umbenennung $x \leftrightarrow z$

- $\iint dx dz f(z) p(x, t + \Delta t | z, t) p(z, t | y, t')$ (3) $\int dx p(x, t + \Delta t | \dots) = 1$ eingefügt

(i) einsetzen W

(2) $\epsilon \rightarrow 0$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-z| > \epsilon} dx =$ Hauptwertintegral (Annahme: existiert)

(1) partielle Integration

$$\int dz \left(\frac{\partial}{\partial z} f(z) \right) A_i(z) p(z, t | \dots) = - \int dz f(z) \frac{\partial}{\partial z} (A_i(z) p(z, t | \dots)) + \text{Randterme } (\rightarrow 0)$$

$$\int dz \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} f(z) \right) B_{ij}(z) p(z, t | \dots) = + \int dz f(z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z) p(z, t | \dots)]$$

$\Rightarrow \int dz f(z) [\dots] = 0$ für bel. $f(z)$

$[\dots] = 0$

Erg:

$$\frac{\partial p(x, t | y, t')}{\partial t} = - \int dz \frac{\partial}{\partial z} [A_i(z, t) p(z, t | y, t')]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | y, t') = - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(z, t) p(z, t | y, t')] \quad (1)$$

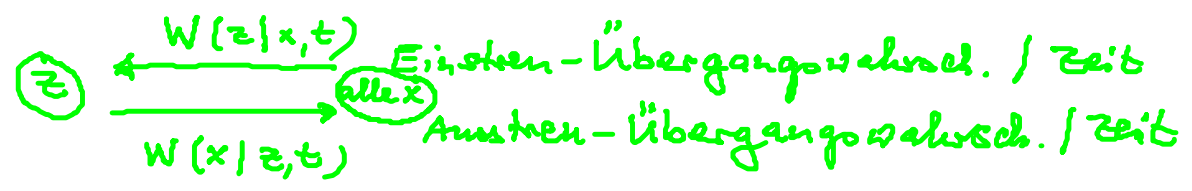
$$+ \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(z, t) p(z, t | y, t')] + \int dx [W(z|x, t) p(x, t | y, t') - W(x|z, t) p(z, t | y, t')] \quad (2) \quad (3)$$

(differenzielle Chapman-Kolmogorov-Gl.)

Anfangsbed. $p(z, t' | y, t') = \delta(y - z)$

(a) Spring- Prozesse (diskontinuierlich) 

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | \dots) = \int dx [W(z|x, t) p(x, t | \dots) - W(x|z, t) p(z, t | \dots)]$$



Mastergleichung (Bilanz rein - raus)