

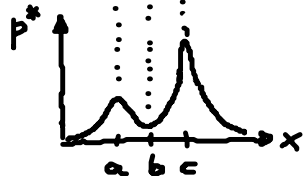
English Summary:

Kramers' problem: Escape over potential barrier



mean first passage time

$$T(a \rightarrow x_0 \rightarrow b) \approx 2\pi\alpha\delta \exp\left[\frac{U(b) - U(a)}{D}\right]$$



bimodal probability distribution

2.3 Langevin equation

$$\dot{x} = a(x,t) + b(x,t)\xi(t)$$

Wiener process

$$\dot{x} = \sqrt{2D}\xi(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} [a(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(x,t)^2 p(x,t)] \quad \text{Fokker-Planck eq.}$$

diff. coeff. $A = a$ diff. coeff. $D = \frac{B}{2} = \frac{b^2}{2}$

(ii) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\xi(t)$$

linear drift

$$\hat{=} \frac{\partial}{\partial t} p = \frac{\partial}{\partial x} (kxp) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p$$

FP-gl.

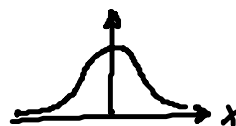
$p = p(x,t|x_0,t_0)$

stationäre Lösung auf $[a, b]$ mit reflektierenden Rändern:
($J(x) = 0$)

$$p^*(x) = N \exp\left[\frac{1}{D} \int_0^x dx' (-kx')\right] = \sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D} x^2\right]$$

$$\langle X(t) \rangle = 0$$

$$\langle \Delta X^2 \rangle = \frac{D}{k}$$



zeitabh. Lösung: $\langle X(t) \rangle_{x_0 t_0} = x_0 e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta X^2 \rangle_{x_0 t_0} = \frac{D}{k} (1 - e^{-2k(t-t_0)})$$

Autokorr. fkt. (stationär; $t_0 \rightarrow -\infty$)

$$\begin{aligned}
 \langle X(t_1)X(t_2) \rangle_{x_0, t_0} &= \iint dx_1 dx_2 x_1 x_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_0, t_0) \quad t_1 \geq t_2 \geq t_0 \\
 &= \int dx_2 \left[\underbrace{\int dx_1 x_1 p(x_1, t_1 | x_2, t_2)}_{\langle x_1 \rangle_{x_2, t_2} = x_2 e^{-k(t_1 - t_2)}} x_2 \underbrace{p(x_2, t_2 | x_0, t_0)}_{\sqrt{\frac{k}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{k}{2D} x_2^2\right]} \right]_{t_0 \rightarrow -\infty} \\
 &= e^{-k(t_1 - t_2)} \int dx_2 x_2^2 p^* \\
 &\quad \langle x^2 \rangle_* = \underbrace{\langle \Delta X^2 \rangle_*}_{D/k} + \underbrace{\langle X \rangle_*^2}_0 \\
 &= \frac{D}{k} e^{-k|t_1 - t_2|}
 \end{aligned}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit $\tau_c = \frac{1}{k}$

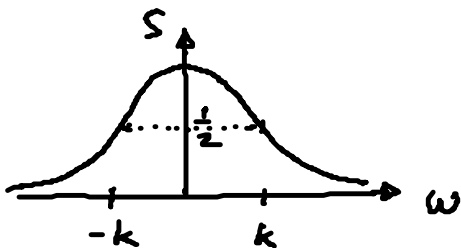
$$\boxed{G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau)X(t) \rangle = \frac{D}{k} e^{-k|\tau|} = D\tau_c e^{-|\tau|/\tau_c}}$$

Spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \frac{D}{2\pi k} \int_0^{\infty} d\tau e^{-k\tau} (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) \\
 &= \frac{D}{2\pi k} \left[\frac{-1}{k+i\omega} e^{-k\tau - i\omega\tau} \Big|_0^{\infty} + \frac{-1}{k-i\omega} e^{-k\tau + i\omega\tau} \Big|_0^{\infty} \right]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{D}{2\pi k} \left(\frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega} \right) = \frac{D}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + k^2}}$$

Lorentzkurve
(Halbwertsbreite $2k$)



Direkte Lösung der Langevin-Gl. $\dot{x} = -kx + \sqrt{2D} \xi(t)$:

Subst. $y = x e^{kt}$

$\dot{y} = (\dot{x} + kx) e^{kt}$

$\Rightarrow \dot{y} = [-kx + \sqrt{2D} \xi(t)] e^{kt} + kx e^{kt}$

$\dot{y} = \sqrt{2D} e^{kt} \xi(t)$

$\Rightarrow y(t) = \sqrt{2D} \int_0^t e^{kt'} \xi(t') dt' + y(0)$ $\xrightarrow{x(0) \text{ Anf. bed.}}$

$\Rightarrow x(t) = x(0) e^{-kt} + \sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \underbrace{\xi(t')}_{dW'}$

$\langle x(t) \rangle = \underbrace{\langle x(0) \rangle}_{\text{zufällige Anf. wert. (unkorrel. mit } \xi(t))} e^{-kt} + \underbrace{\sqrt{2D} \int_0^t e^{-k(t-t')} \langle \xi(t') \rangle dt'}_0$

Autokorrel. fkt.:

$\langle x(t)x(t') \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t') \rangle$

$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + 2D \int_0^{t'} dt'' e^{-k(t-t'')} \int_0^{t''} dt''' e^{-k(t'-t''')} \langle \xi(t'') \xi(t''') \rangle$
 $\underbrace{\langle \xi(t'') \xi(t''') \rangle}_{\delta(t''-t''')}$

$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2] e^{-k(t+t')} + \frac{2D}{2k} e^{-k(t+t')} e^{2kt'''} \Big|_0^{t'}$
 $\int dt''$ fällt weg für $t > t'$ sonst $\int dt'''$ weg

$= [\langle x(0)^2 \rangle - \langle x(0) \rangle^2 - \frac{D}{k}] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}$

Stationär: $t, t' \rightarrow \infty$, $t-t'$ endlich

$= \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}$ wie aus FP-Gl.!

Varianz: $t = t'$

$\langle (\Delta x)^2 \rangle = [\langle \Delta x(0)^2 \rangle - \frac{D}{k}] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} \xrightarrow[t \text{ stationär, } t, t' \rightarrow \infty]{} \frac{D}{k}$

wie FP-Gl.

3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die deterministische Dynamik aus u. macht sie irregulär (destruktiv),

Neues Phänomen: konstruktiver Einfluss von Rauschen in nichtlinearen Systemen

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen.

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

Lit.: Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni,
Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)

Benzi, Sutera, Vulpiani, J. Phys. A 14, L451 (1981) } period.
Nicolis C., Nicolis G., Tellus 33, 225 (1981) } Wiederkehr
der Eiszeiten
(kleine period. Schwankungen der Erdachse u. der Exzentrizität der Umlaufbahn - reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen, $T = 20.000/100.000$ J. \Rightarrow stoch. Resonanz)

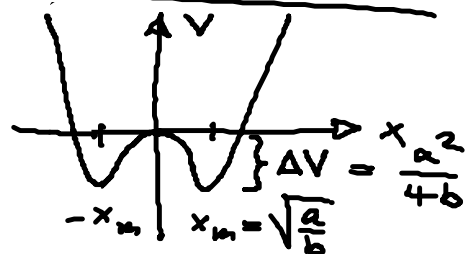
Weitere Beispiele: el. Stromkreis (Schmitt-Trigger)
bistabiler Ringlaser
Neurophysiologie (Spiking: 2-Zustands-Sys.)
z.B. Flussskreb (Crayfish)
Quanten-Tunneln
raum-zeitl. Systeme (anregbare Medien)

Überdämpftes Brown'sches Teilchen in bist. Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$$

mit period. Kraft $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißes Rauschen $\xi(t)$



Langens - gp.

$$\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

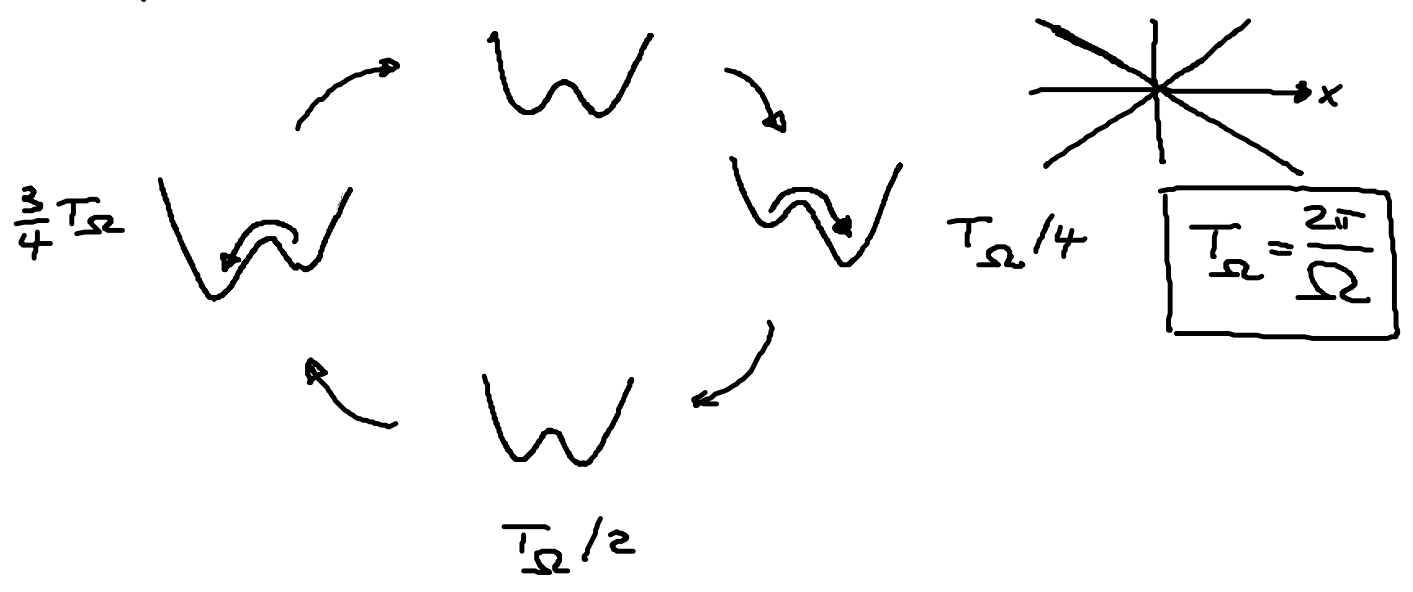
$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2D \delta(t-t')$$

$a=b=1$: $\dot{x} = x - x^3 + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate) zwischen $-x_m$ und $+x_m$ (ohne period. Kraft)

$$r_K = \frac{1}{T_K(D)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \quad (a=b=1)$$

period. Modulation des Pot. $V(x) - A_0 x \cos(\Omega t)$:



\Rightarrow period. Osz. im bistab. Pot. $\langle x(t) \rangle = \bar{x} \cos(\Omega t - \bar{\phi})$

Verstärkung der Amplitude \bar{x} , wenn $T_\Omega \approx 2T_K(D)$
 $(\Omega \approx \pi r_K)$

\Rightarrow stochast. Resonanz