

English Summary:

3.7 Noise-induced spatio-temporal patterns

excitable media

1. Noise-induced fronts in semiconductor superlattices

$$e v_0 (F_m - F_{m-1}) = e (n_m - N_D)$$

$$e \dot{n}_m = J_{m-1 \rightarrow m} + D \xi_m(t) - J_{m \rightarrow m+1} - D \xi_{m+1}(t)$$

$D=0$: SNIPER bifurcation (exc. type I)
 $D \neq 0$: coherence resonance
 exp.: Y. Huang et al.
 Europhys. Lett. 105, 47005 (2014)

2. Resonant tunnel diode

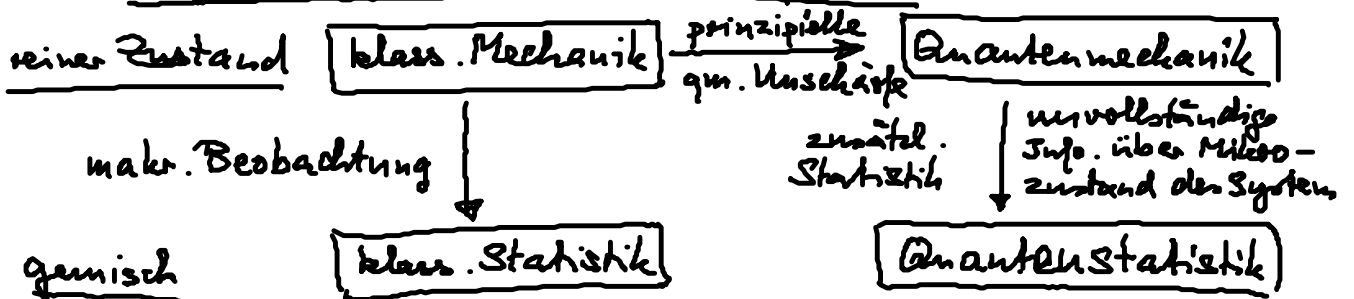
$$\dot{a} = f(a, u) + D \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + D_a \xi(x, t)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\epsilon} (U_0 - u - R I) + D_u \zeta(t)$$

$D=0$: supercrit. Hopf bif. (breathing current filaments)
 $D \neq 0$: noise-induced breathing no coherence resonance

4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht

4.1 Dichtematrix - statistischer Operator



4.1.1 Erwartungswerte

(i) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat $|\alpha\rangle$ im reinen Zust. $|\psi\rangle$
 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$

$$|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \underbrace{|\alpha\rangle\langle \alpha|}_{\text{Projektor}} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle = |\langle \alpha | \psi \rangle|^2$$

inhärenter statist. Charakter!

Erwartungswert von \hat{M} im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\langle \hat{M} \rangle = \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \sum_\alpha \langle \psi | \hat{M} | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \quad \text{⊗}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\alpha'} \langle \alpha | \alpha' \rangle \langle \alpha | \hat{M} | \alpha' \rangle \underbrace{\langle \alpha' | M | \alpha \rangle}_{M_{\alpha'\alpha}} \\
&\text{falls } |\alpha\rangle \text{ Eigenbasis} \\
&= \sum_{\alpha} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 M_{\alpha\alpha} \\
&\hspace{10em} \text{Eigenwerte von } \hat{M} \\
\langle \hat{M} \rangle &\stackrel{\text{①}}{=} \sum_{\alpha} \underbrace{\langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi |}_{\mathbb{P}_{\psi}} \hat{M} | \alpha \rangle \\
&= \text{tr}(\mathbb{P}_{\psi} \hat{M}) \quad \text{trace} = \text{Spur}
\end{aligned}$$

(ii) Quantenmech. Gemisch

- unvollständige Info. über Mikrozustand, also Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i über die möglichen reinen Zustände $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{M} \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_i \rangle \quad \text{wobei } \sum_i p_i = 1 \\
&= \sum_{ij} p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_i \rangle \\
&= \sum_{ij} \langle \psi_j | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle \\
&= \sum_j \langle \psi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \psi_j \rangle \quad \hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|
\end{aligned}$$

$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})$

statistischer Op.
= Dichtematrix

Es gilt: $\text{tr} \hat{\rho} = 1$

$$\left. \begin{aligned} &\hat{\rho}^2 + \hat{\rho} \\ &\text{tr} \hat{\rho}^2 < 1 \end{aligned} \right\} \text{Gleichheit gilt nur für reine Zustände} \\
&\quad (\hat{\rho} = \hat{\rho}^2, \hat{\rho}^2 = \hat{\rho})$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad \text{hermitesch}$$

Mittelwert eines Projektions op. $|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$

$$\text{tr}(|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle \varphi_n | \psi_i \rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

$\hat{=}$ Wahrscheinl., den Zustand $|\varphi_n\rangle$ bei Messung zu erhalten

Bem.: reine Zustände \rightarrow kohärente Überlagerungen von Wahrscheinl. amplituden

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\kappa \kappa'} \langle \psi | \kappa \rangle \underbrace{\langle \kappa | \hat{M} | \kappa' \rangle}_{\text{qm. Phase}} \langle \kappa' | \psi \rangle$$

⇒ Interferenztärme, falls M nicht diagonal in $|\kappa\rangle$

Gemisch → inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

⇒ keine Interferenz!

4.1.2 Liouville-von Neumann-Gleichung

Zeitentwicklung der Dichtematrix im Schrödingerbild (Zust. zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i\rangle = \hat{H} |\psi_i\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_i | = \langle \psi_i | \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_i p_i (|\psi_i\rangle \langle \psi_i| + |\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| - |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{H})$$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]}$$

Vorsicht: nicht verwechseln mit
Beweg.gl. für Op.
im Heisenbergbild
(dort anderes Vorzeichen!)

Liouville-von Neumann-gl.

• Quantenmech. Analogon zur Liouville-gl. der klass. Mech.

Bem.: • Für 1 Teilchen in 2-Niveau-System (Basis: 2-Zust.)
ist $\hat{\rho}$ eine 2x2-Matrix, d.h. v. Neumann-gl.
liefert 4 gl.

• Für Vielteilchen-System (Halbleiter mit 2 Bändern)
wird Basis im Fockraum benötigt

4.1.3 Verteilungsfkt. der Elektronen/Löcher im Halbleiter

a_k^+ Erzeugungsop. eines El. im Zustand k

a_k Vernichtungsop. " " " "

$$\text{Antikommutator } \{a_k^+, a_l^+\} = \{a_k, a_l\} = 0$$

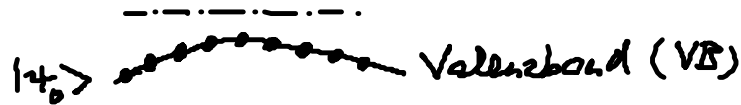
$$\{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl}$$

Antisymm.
der
Fermionen

Betrachte $\langle a_k^+ a_k \rangle$ Mittelwert des Besetzungszahl op. $a_k^+ a_k$ im gemischten Zustand $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$

$|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$: mögliche Verteilung der Elektronen auf erlaubte 1-Teilchen-Zustände k (keine Zustände)
 (Vierteilchenzust.)

Beispiel Halbleiter: Grundzustand bei $T=0$
 √ Leitungsband (LB)



$$\langle a_k^+ a_k \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} a_k^+ a_k) = \sum_i p_i \langle \varphi_i | a_k^+ a_k | \varphi_i \rangle$$

n_k^i Besetzung des 1-Teilchen-Zust. k im Vierteilchen-Zust. $|\varphi_i\rangle$
 $n_k^i = 0, 1$

$$= \sum_i p_i n_k^i$$

$$= f_e(k) \quad \underline{\text{Verteilungsfkt.}}$$

(Max. von $f_e(k)$: $n_k^i = 1 \quad \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$)

$f_e(k)$ ist die Wahrscheinl., ein El. bei k zu finden

- im reinen Zustand $f_e(k) = 0$ oder $f_e(k) = 1$
- im gemischt $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- im thermodyn. Gleichgewicht ist $f_e(k)$ die Fermi-Verteilung

Analog $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k) \quad \underline{\text{Loch-Verteilungsfkt}}$

d_k^+ Erzeugung op. eines Loches im Zustand k

d_k Vernichtung op. " "

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl betrachtet wird:

$$f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$$

4.2 Semiklass. Wechselwirkung mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichung der Elektronenverteilung vom thermodyn. Gleichgewicht

$$\Rightarrow \text{Ham. op } \hat{H}_{\text{opt}}$$

Dipolkopplung an elektr. Feld $\underline{E}(r,t)$, z.B. Laserpuls (extern, klass. beschrieben)

$$\hat{H}_{\text{opt}} = e \underline{r} \cdot \underline{E}(r,t) \quad \text{mit gm. el. Dipol-Op. } e \underline{r}$$

(halbklass.: keine Feldquantisierung)
des Lichtes