

# English Summary:

## 3.7 Noise-induced spatio-temporal patterns

excitable media

### 1. Noise-induced fronts in semiconductor superlattices

$$e v_0 (F_m - F_{m-1}) = e (n_m - N_D)$$

$$e \dot{n}_m = J_{m-1 \rightarrow m} + D F_m(t) - J_{m \rightarrow m+1} - D F_{m+1}(t)$$

$D=0$ : SNIPER bifurcation (exc. type I)

$D \neq 0$ : coherence resonance

exp.: Y. Huang et al.

Europhys. Lett. 105, 47005 (2014)

### 2. Resonant tunnel diode

$$\dot{a} = f(a, u) + D_1 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + D_2 F(x, t)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\tau} (U_0 - u - R I) + D_u Z(t)$$

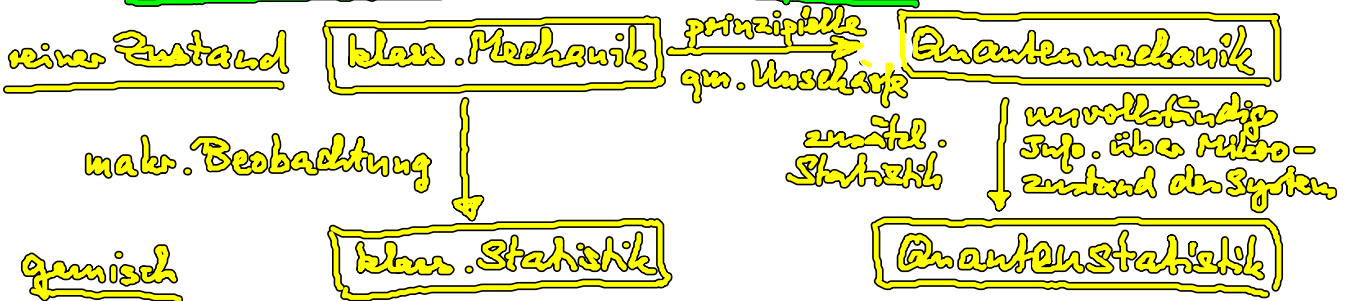
$D=0$ : supercrit. Hopf bif.

(breathing current filaments)

$D \neq 0$ : noise-induced breathing  
no coherence resonance

## 4. Quantenstatistik in Nichtgleichgewicht

### 4.1 Dichtematrix - statistischer Operator



### 4.1.1 Erwartungswerte

#### (i) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat  $|\alpha\rangle$  im reinen Zust.  $|\psi\rangle$   
 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_\psi$

$$|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \underbrace{|\alpha\rangle\langle \alpha|}_{\text{Projektor}} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle = |\langle \alpha | \psi \rangle|^2$$

inhärenter statist. Quanten!

Erwartungswert von  $\hat{A}$  im Zustand  $|\psi\rangle$ :

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_k \langle \psi | \hat{A} | k \rangle \langle k | \psi \rangle \quad \odot$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha, \alpha'} \langle \alpha | \alpha' \rangle \langle \alpha | \hat{M} | \alpha' \rangle \underbrace{\langle \alpha' | M | \alpha \rangle}_{M_{\alpha\alpha'}} \\
&\text{falls } | \alpha \rangle \text{ Eigenbasis} \\
&= \sum_{\alpha} |\langle \alpha | \alpha \rangle|^2 M_{\alpha\alpha} \\
&\quad \text{Eigenwerte von } \hat{M} \\
\langle \hat{M} \rangle &\stackrel{\text{tr}}{=} \sum_{\alpha} \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{\mathbb{1}_{\alpha}} \langle \alpha | \hat{M} | \alpha \rangle \\
&= \text{tr}(\mathbb{P}_{\alpha} \hat{M}) \quad \text{trace} = \text{Spur}
\end{aligned}$$

## (ii) Quantenmech. Gemisch

- unvollständige Inf. über Mikrozustand, also Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_i$  über die möglichen reinen Zustände  $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Teil}}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_i p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_i \rangle \quad \text{wobei } \sum_i p_i = 1$$

$$= \sum_{ij} p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle p_i \langle \varphi_i | \hat{M} | \varphi_j \rangle$$

$$= \sum_j \langle \varphi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \varphi_j \rangle$$

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$$

statistisches Op.  
= Dichtematrix

$$\boxed{\langle \hat{M} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{M})}$$

Es gilt:  $\text{tr} \hat{\rho} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\rho}^2 + \hat{\rho} \\ \text{tr} \hat{\rho}^2 < 1 \end{array} \right\} \text{ Gleichheit gilt nur für reine Zustände} \\ (\hat{\rho} = \hat{P}, \hat{\rho}^2 = \hat{\rho})$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad \text{hermitesch}$$

Mittelwert eines Projektions op.  $|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n|$

$$\text{tr}(|\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle \varphi_n | \varphi_i \rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

≙ Wahrscheinl., den Zustand  $|\varphi_n\rangle$  bei Messung zu erhalten

Bem.: reine Zustände  $\rightarrow$  kohärente Überlagerungen von Wahrscheinl. amplituden

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\kappa \kappa'} \langle \psi | \kappa \rangle \underbrace{\langle \kappa | \hat{M} | \kappa' \rangle}_{\text{qm. Phase}} \underbrace{\langle \kappa' | \psi \rangle}$$

⇒ Interferenztöne, falls  $M$  nicht diagonal in  $|\kappa\rangle$

Gemisch → inkohärente Überlagerung von reinen Zuständen

⇒ keine Interferenz!

### 4.1.2 Liouville-von Neumann-Gleichung

Zeitentwicklung der Dichtematrix im Schrödingersbild (Zust.zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i\rangle = \hat{H} |\psi_i\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_i| = \langle \psi_i| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_i p_i (|\psi_i\rangle \langle \psi_i| + |\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| - |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{H})$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Vorsicht: nicht verwechseln mit  
Beweg.gl. für Op.  
im Heisenbergbild  
(dort andere Vorzeichen!)

Liouville-von Neumann-Gl.

- Quantenmechan. Analogon zur Liouville-Gl. der klass. Mech.
- Bem.: • Für 1 Teilchen in 2-Niveau-System (Basis: 2-Zust.)  
ist  $\hat{\rho}$  eine 2x2-Matrix, d.h. v. Neumann-Gl.  
liefert 4 Gl.
- Für Vielteilchen-System (Halbleiter mit 2 Bändern)  
wird Basis im Fockraum benötigt

### 4.1.3 Verteilungsfkt. der Elektronen/Löcher in Halbleiter

$a_k^+$  Erzeugung op. eines El. in Zustand  $k$   
 $a_k$  Vernichtungs op. " " " "

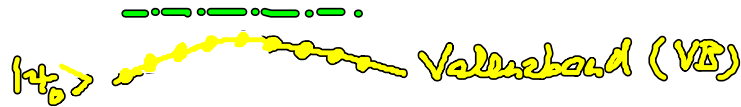
Antikommutator  $\{a_k^+, a_l^+\} = \{a_k, a_l\} = 0$   
 $\{a_k, a_l^+\} = \delta_{kl}$

Antisymmetrie  
der  
Fermionen

Betrachte  $\langle a_k^+ a_k \rangle$  Mittelwert des Besetzungszahl op.  $a_k^+ a_k$   
 im gemischten Zustand  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$

$|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$ : mögliche Verteilung der Elektronen  
 (Vielteilchenzust.) auf erlaubte 1-Teilchen-Zustände  $k$   
 (keine Zustände)

Beispiel Halbleiter: Grundzustand bei  $T=0$   
 ∪ Leitungsband (LB)



$$\begin{aligned} \langle a_k^+ a_k \rangle &= \text{tr}(\hat{\rho} a_k^+ a_k) \\ &= \sum_i p_i \langle \varphi_i | a_k^+ a_k | \varphi_i \rangle \end{aligned}$$

$n_k^i$  Besetzung des 1-Teilchen-Zust.  $k$   
 im Vielteilchen-Zust.  $|\varphi_i\rangle$   
 $n_k^i = 0, 1$

$$= \sum_i p_i n_k^i$$

$$= f_e(k) \quad \underline{\text{Verteilungsfkt.}}$$

(Max. von  $f_e(k)$ :  $n_k^i = 1 \quad \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$ )

$f_e(k)$  ist die Wahrsch. ein El. bei  $k$  zu finden

- im reinen Zustand  $f_e(k) = 0$  oder  $f_e(k) = 1$
- im gemisch  $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- in thermodyn. Gleichgewicht ist  $f_e(k)$  die Fermi-Verteilung

Analog  $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k) \quad \underline{\text{Loch-Verteilungsfkt}}$

$d_k^+$  Erzeugung op. eines Loches im Zustand  $k$   
 $d_k$  Vernichtung op. " "

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl betrachtet wird:

$$f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^+ a_{ks} \rangle$$

## 4.2 Semiklass. Wechselwirkung mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichung der Elektronenverteilung vom thermodyn. Gleichgewicht  
⇒ Ham.op  $\hat{H}_{\text{opt}}$

Dipolkopplung an elektr. Feld  $\underline{E}(\underline{r}, t)$ , z.B. Laserpuls (extern, klass. beschrieben)

$$\hat{H}_{\text{opt}} = \underline{e}_r \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \text{mit gw. el. Dipol-Op. } \underline{e}_r$$

(halbklass.: keine Feldquantisierung)  
des Lichtes