English Summary:

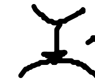
4.2 Semiclassical interaction with light

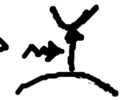
$\hat{H}_{opt} = e\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t)$

macroscopic polarisation $\underline{P}(\underline{r},t) = \langle e\hat{\psi}^+(\underline{r},t)\,\underline{r}\,\hat{\psi}(\underline{r},t)\rangle$ qm. el. dipole density op.

field op.: $\hat{\psi}^+(\underline{r}) = \sum_\lambda \psi^*_\lambda(\underline{r})\,a^+_\lambda$ creation op.

$\hat{\psi}(\underline{r}) = \sum_\lambda \psi_\lambda(\underline{r})\,a_\lambda$ annihilation op.

microscopic interband polaris. $p(\underline{k},t) = \langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}}\rangle$  $\rightsquigarrow$ em.

$p^*(\underline{k},t) = \langle a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}}\rangle$ $\rightsquigarrow$  abs.

$\hat{H}_{opt} = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu}\cdot\underline{E}(t)\,(a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}} + d_{\underline{k}} a_{\underline{k}})$

$\underline{\mu}(\underline{k}) = \frac{1}{V}\int d^3r\, u_{c\underline{k}}(r)\, e\underline{r}\, u_{v\underline{k}}(\underline{r})$

el. dipole matrix el.

Semiconductor Bloch eqs.:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{f}_e(\underline{k},t) &= \frac{1}{i}\Omega_p\,(p^*(\underline{k},t) - p(\underline{k},t)) \\ \dot{p}(\underline{k},t) &= \frac{1}{i}\omega_p(\underline{k})\,p(\underline{k},t) - \frac{1}{i}\Omega_p\,(f_e+f_h-1) \\ \dot{f}_h(\underline{k},t) &= \dot{f}_e(\underline{k},t) \end{aligned}}$$

$\Omega_p = \frac{\underline{\mu}\cdot\underline{E}}{\hbar}$ Rabi frequ.

$\omega_p(\underline{k}) = \frac{E_c(\underline{k}) - E_v(\underline{k})}{\hbar}$ opt. trans. frequ.

4.3 Quantisierung des Strahlungsfeldes

bisher: Materie qm.
el. magn. Feld klassisch } semiklass. Bloch-Gln.

jetzt: voll qm. Beschreibung des Lichtes → E-Feld wird Op.

Wozu?
- Beschreibung von Vakuum-Fluktuation → spontane Emission
- Beschreibung korrelierter Photonen (Verschränkung)
- " nicht-klassischer Photonenstatistik (anti-bunching bei Einzelphotonemittern)
- gequetschte Zustände
- Lasing ohne Inversion

Quantisieren : Aufstellen von Vertauschungsrel. von Operatoren im Hilbertraum

phys. Observable $\rightarrow$ hermit. Op.

- 1. Quantisierung $\begin{pmatrix} x \rightarrow \hat{x} \\ p \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla \end{pmatrix}$ führt auf Schrödingergl.

$$[\hat{p}_i , \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\mathbb{1}$$

$i,k = 1,2,3$ kart. Koord.

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_k] = [\hat{x}_i , \hat{x}_k] = 0$$

Unschärfe $(\Delta\hat{A})^2 = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle$

$$\Delta\hat{A}\,\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

$$\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$ QM Unschärfe

- 2. Quantisierung des Schrödinger'schen Wellenfeldes in der Vielteilchentheorie

$\rightarrow$ Vereinfachung der (Anti-)Symmetrisierung Erzeugungs- u. Vernichtungs-Op. im Fock-Raum $\mathcal{H}_F = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^N$
+ Quantisierungsvorschrift aus Symmetrieeigenschaften

$\rightarrow$ Bosonen $[\hat{a}_k^+, \hat{a}_l^+] = [\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0$

$$[a_k, a_l^+] = \delta_{kl}$$

$\rightarrow$ Feldop. $\hat{\psi}^+(r) := \sum_\lambda \psi_\lambda^*(r)\,\hat{a}_\lambda^+$

Lösung der Schrödingergl eines Teilchens im Zustand λ

NB : Für el. magn. Feld ist Symm. a priori nicht bekannt
$\rightarrow$ Quantisierung über Lagrangefkt.

4.3.1 Feldquantisierung über Lagrange-Formalismus

Idee : Analog zur Punktmechanik aus Poisson-Klammer Vertauschungsrel. folgern

$$L(q_\alpha, \dot q_\alpha, t) \longrightarrow p_\alpha := \partial_{\dot q_\alpha} L$$

Lagrangefkt für Koord. q_α — kanon. Impuls

$$\{q_\alpha, p_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'} \xrightarrow{\text{Quantisierung}} [\hat q, \hat p] = i\hbar$$

- Wirkungsprinzip für Punktmechanik

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad \text{mit } 0 = \delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (1)$$

- Wirkungsprinzip für Felder $\psi(\underline{r}, t)$ (kontinuierl. Grenzfall)

Teilchen $S_T = S(q_\alpha, \dot q_\alpha, t)$

Feld $S_F = S(\psi(\underline{r},t), \partial_t\psi(\underline{r},t), \partial_k\psi(\underline{r},t), t) \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$= \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi, t)$$

$\uparrow$ Lagrangedichte

Lagrangefunktional $L := \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi, t)$
$= L(\psi, \dot\psi, t)$

Hamilton-Prinzip $\delta S_F = 0$ mit $\delta\psi(\underline{r}, t_1) = \delta\psi(\underline{r}, t_2) = 0$

$$0 = \delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \delta\mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi)$$

$$= \int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\delta\dot\psi}_{\text{part. Int.}} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\delta\partial_k\psi}_{\text{part. Int.}}\right]$$

$$= \int d^3r \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\right)\delta\psi + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\delta\psi\right)}_{=0 \text{ at } t_1 \text{ and } t_2} + \underbrace{\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi}\delta\psi\right)}_{\substack{0 \\ \text{Vektordivergenz,} \\ \text{Gauß'scher Satz}}}\right]$$

$\delta\psi(\underline{r})$ unabhängig, frei variierbar

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = 0} \qquad (2)$$

$$= \frac{\delta L}{\delta \psi} \hat{=} \text{Funktionalableitung von } L$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ L(\psi(r') + \varepsilon\delta(r-r'), \dot\psi(r')) - L(\psi(r'), \dot\psi(r')) \right\}$$

Lagrange-gl. für Felder

- verallg. Impuls zu $\psi(\underline{r})$: $\boxed{\pi(\underline{r}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi}}$
- Hamiltondichte $\mathcal{H} = \pi(\underline{r})\dot\psi(r) - \mathcal{L}$
- Hamiltonfunktional $H = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r\, \pi(\underline{r})\dot\psi(\underline{r}) - L$
- Poissonklammer $\dot F = \int d^3r \left(\frac{\delta F}{\delta \psi}\dot\psi + \frac{\delta F}{\delta \pi}\dot\pi \right) =: \{F, H\}$

mit $\frac{\delta H}{\delta \psi} = -\dot\pi$

$\frac{\delta H}{\delta \pi} = \dot\psi$

$$\Rightarrow \{\psi(\underline{r}), \pi(\underline{r}')\} = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Übergang zur Quantentheorie: $\psi \to \hat\psi$

$\pi \to \hat\pi$

- Vertauschungsrel. aus Poisson-Klammer $\boxed{[\hat\psi(\underline{r}), \hat\pi(\underline{r}')] = i\hbar\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$
- Zeitentwicklung $\dot{\hat F} = \frac{1}{i\hbar}[\hat F, \hat H]$

4.3.2 Lagrangedichte für freies el.-magn. Feld

Frage: $\mathcal{L}$?

Wähle $\mathcal{L}$ so, dass Lagrange-Feldgl. die klass. Feldgln. reproduzieren!

Tipp: klass. Feldenergie $E_{EM} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \underline{E}(\underline{r},t)\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, \underline{B}\cdot\underline{B}$

- klass. Feldgl. : E-Dyn. mit Coulomb-Eichung $\nabla\cdot\underline{A} = 0$

(I) $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0$ $\qquad \underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \underbrace{\nabla\Phi}_{=0}$

(II) $\Delta\Phi = 0 \xrightarrow{\text{o.B.d.A}} \Phi = 0$ $\qquad \underline{B} = \nabla\times\underline{A}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Vektorfeld } \underline{A} \text{ ist das zu quantisierende Feld}}$ 4

- Ansatz $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}\cdot\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\cdot\underline{B}\right)}$

Einsetzen in ② wobei
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k A_i} = \frac{1}{\mu_0}\partial_{x_k} A_i$$
$$\left(\underline{B}^2 = (\nabla\times A)^2 = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{k\ell n}\partial_{x_i}A_j\,\partial_{x_\ell}A_n\right)$$

$\Rightarrow$ Lagrange-Gl. liefert Wellengl. für $\underline{A}$: $\Delta\underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{A} = 0$

kanon. konjug. Feld $\boxed{\Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k = -\varepsilon E_k}$

Hamiltondichte $\rightarrow$ Hamiltonfunktional
$$H = \int d^3r \left(\sum_k \Pi_k \dot{A}_k - \frac{\varepsilon_0}{2}\dot{A}_k^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3r \sum_k \left(\varepsilon_0 E_k^2 + \frac{1}{\mu_0}B_k^2\right) \quad \hat{=} \text{ Feldenergie}$$

- Quantisierung: $\left[\hat{A}_k(r), \hat{\Pi}_{k'}(r')\right] = i\hbar\,\delta_{kk'}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$
$$\left[\hat{A}_k(r), \hat{A}_{k'}(r')\right] = 0$$

4.3.3 Modenentwicklung für freien Raum

Lösung der Wellengl. $\Box A(r,t) = 0$

Separationsansatz

$$\hat{A}_k(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \hat{q}_\lambda(t) \qquad (3)$$

→ Lösung der Helmholtz-Gl.

$$\Delta A_{\lambda k} + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} A_{\lambda k} = 0$$

z.B. ebene Welle

für $\hat{q}_\lambda$ bleibt Bewegungsgl.

$$\boxed{\ddot{\hat{q}}_\lambda + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda^2 = 0} \qquad \hat{=} \text{ Oszillator-Gl.}$$

kan. konjug. Feld $\varepsilon_0 \dot{A}_k(r,t) = \sqrt{\varepsilon} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \dot{\hat{q}}_\lambda(t)$

$$\boxed{\hat{\Pi}_k(r,t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \hat{p}_\lambda(t)} \qquad \dot{q} = p$$