English Summary:

<u>fields</u> $\hat{A}_k = \sum_\lambda \tilde{A}_{\lambda k}(\mathbf{r})\left(\hat{a}_\lambda(0)e^{i\omega_\lambda t} + \hat{a}^+_\lambda(0)e^{-i\omega_\lambda t}\right)$ Heisenberg op. $a_\lambda(t), a^+_\lambda(t)$

$$\hat{E}_k = -\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\Pi}_k = -\dot{\hat{A}}_k, \quad \hat{B}_k = \epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{A}_j$$

free photon Hamiltonian $\boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2}\right)}$

photon number op. $\boxed{\hat{n}_\lambda = \hat{a}^+_\lambda \hat{a}_\lambda}$

4.4 Quantum states of light

4.4.1 Fock states = photon number states $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$

$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ phase undetermined, amplitude (energy) sharp (max. nonclassical)

$\langle\hat{n}\rangle = n \qquad \langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = 0$

$\langle\hat{E}\rangle = 0 \qquad \langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = |c|^2(2\langle\hat{n}\rangle+1), \quad \hat{E} = c\hat{a} + c^*\hat{a}^+$

4.4.2 Glauber-Zustände – kohärente Zustände

Roy Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963)
Nobelpreis 2005

Idee: minimale Unschärfe → verschobener Vakuumzustand

<u>Ansatz</u>: suche Eigenzustände zu $\hat{a}$ (Glauber-Zustand)

Eigenwertgl. $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Entwicklung nach Fock-Zuständen $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\,c_n|n-1\rangle \overset{!}{=} \alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_n|n\rangle$$

$$= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-1}|n-1\rangle$$

$$\Rightarrow c_n\sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$$

rekursiv: $c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{n-2}$$
$$\parallel$$
$$\frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} c_{n-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}$$

aus Normierung $\langle\alpha|\alpha\rangle \overset{!}{=} 1 = |c_0|^2 \sum_{n,n'} \frac{\alpha^{*n}\alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}$

$$= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$\boxed{c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}}$$

Poisson-Verteilung der Photonen auf Fock-Zustände

$$p(n) = \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n\rangle = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}$$

<u>Bem.</u>: Zustände sind nicht orthogonal (nur näherungsweise):

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

<u>Statistische Eigenschaften im Zustand $|\alpha\rangle$</u>

- <u>Feldstärkestatistik</u> $\qquad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}$

Mittelwert $\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = C\alpha + C\alpha^* = 2C|\alpha|\cos\theta$ $\quad$ ($C \in \mathbb{R}$)

Varianz $\langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = \langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle^2$

$$= \langle\alpha|C^2(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{1+\hat{a}^\dagger\hat{a}} + \hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha\rangle - 4C^2|\alpha|^2\cos^2\theta$$

$$= C^2\left(|\alpha|^2 e^{2i\theta} + |\alpha|^2 e^{-2i\theta} + 1 + 2|\alpha|^2\right) - 4C^2|\alpha|^2\cos^2\theta$$

$$= C^2|\alpha|^2 \underbrace{(2\cos(2\theta) + 2 - 4\cos^2\theta)}_{0} + C^2$$

$$= C^2$$

Varianz der Feldstärke im Glauber-Zustand $|\alpha\rangle$ entspricht der Varianz im Vakuum,

Unschärfe unabhängig von α

- <u>Photonenstatistik</u>

$$\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^{+}\hat{a}|\alpha\rangle = \boxed{|\alpha|^2 = \bar{n}}$$ mittlere Photonenzahl

$$\langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^{+}\underbrace{\hat{a}\hat{a}^{+}}_{[\hat{a},\hat{a}^{+}]=1}\hat{a}|\alpha\rangle$$

$$= \langle\alpha|(\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^{+}\hat{a})|\alpha\rangle$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

Varianz $\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n}$

- Photonenzahl fluktuiert um $\bar{n}$ mit $\sqrt{\bar{n}}$
- $\neq 0$ ($=0$ im Fock-Zustand)

- Quadraturkomponenten $\hat{x}_1, \hat{x}_2$

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^{+}(0)$$
$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^{+}(0))$$

$$\langle\alpha|\hat{x}_1|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$$

$$\langle\alpha|\hat{x}_2|\alpha\rangle = 2\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

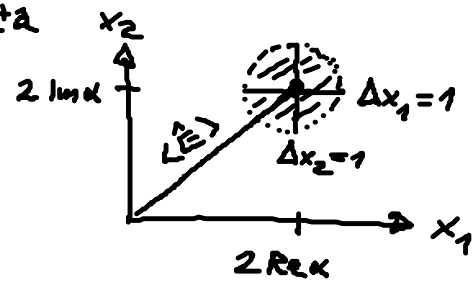
einmodiges E-Feld: $\hat{E} = -C(\hat{x}_2 \sin\omega t + \hat{x}_1 \cos\omega t)$

Schwankung

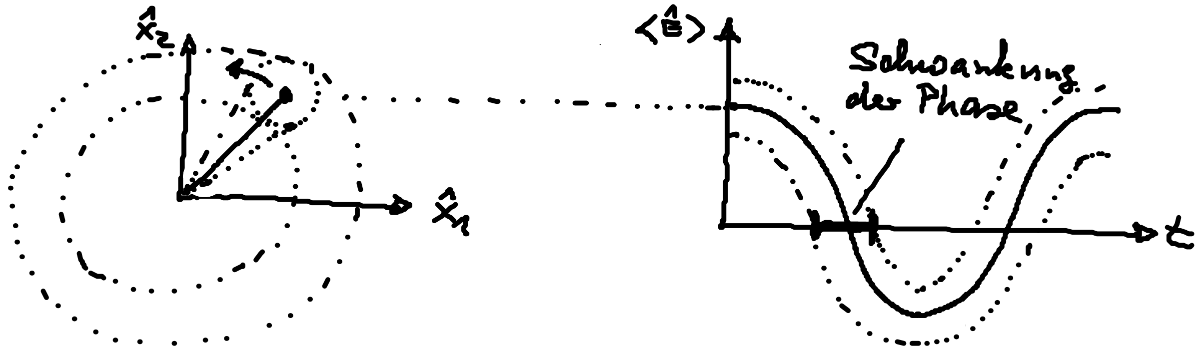
$$\langle\alpha|(\Delta\hat{x}_1)^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|(\Delta\hat{x}_2)^2|\alpha\rangle$$

$$= \langle\alpha|\underbrace{\hat{a}\hat{a}^{+}}_{1+\hat{a}^{+}\hat{a}} + \hat{a}^{+}\hat{a} + \hat{a}\hat{a} + \hat{a}^{+}\hat{a}^{+}|\alpha\rangle - (2\,\mathrm{Re}\,\alpha)^2$$

$$= 1$$



- Zeitabhängigkeit $\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Bem. • $\frac{\sqrt{(\Delta \hat{n})^2}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \to 0$ relative Schwankung verschwindet für große Photonenzahl (also große α)

• im Glauber-Zustand hat $\hat{E}$ relativ bestimmte Phase + Amplitude

$$\boxed{\text{kohärenter Zustand} = \text{klass. Zustand}}$$

• Glauber-Zustände können durch qm. <u>Verschiebungsop</u> aus dem Vakuum-Zustand erzeugt werden

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\hat{a}^+)^n}_{\hat{D}(\alpha) \text{ Verschiebungsop.}} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} |0\rangle$$

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} \underbrace{e^{-\alpha^* \hat{a}}}_{\text{ändert } |0\rangle \text{ nicht}}$$

es gilt $e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}}}$$

• Warum Verschieb. op.?
$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\, \hat{a}\, \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$
$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\, \hat{a}^+ D(\alpha) = \hat{a}^+ + \alpha^*$$

Unitäre Transform. mit $\hat{D}$ verschiebt $\hat{a}$ um α

$\Rightarrow$ verschiebt die Null-Lage des Osz.

• Warum wird $|\alpha\rangle$ kohärenter Zustand genannt?

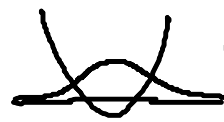
$\hat{a}$ in Orts (q)-Darstellung $\quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)$, $\quad p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

Dgl. für Vakuumzustand $\phi_0(q)$ in q-Darstellung:

$$\left(\omega q + \hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)\phi_0(q) = 0$$

Lösung: $\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}}$ Osz.-Grundzustand



Gauß-Verteilung

Wähle als Anfangsbed. ein verschobenes Vakuum:

$$t=0: \quad \psi_{\alpha_0}(t) = \langle q|\alpha_0\rangle = \langle q|\hat{D}(\alpha_0)|0\rangle$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\alpha_0^{*2} - \alpha_0^2)}\, e^{i\frac{p_{\alpha_0}}{\hbar}q}\,\phi_0(q - q_{\alpha_0})$$

$$q_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\mathrm{Re}\,\alpha$$

$$p_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\,\mathrm{Im}\,\alpha$$

Zeitentwicklung:

$$\psi_\alpha(q,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\underbrace{\psi_{\alpha_0}(q)}_{\text{Anf. Bed}}, \quad H|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)^n}{\sqrt{n!}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\,\phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\, e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_0 e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\,\phi_n(q)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t}\,\psi_{\alpha(t)}(q), \quad \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$$

$$\left|\psi_\alpha(q,t)\right|^2 = \left|e^{\frac{i}{\hbar}p_\alpha(t)q}\,\phi\left(q - q_{\alpha(t)}\right)\right|^2$$

$$= |\phi(q-q_{\alpha(t)})|^2$$

$$= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar}(q-q_{\alpha_0}\cos\omega t)^2}$$

Wellenpaket, das hin und her oszilliert, ohne seine Form zu ändern oder zu zerfliessen.

$\Rightarrow$ <u>kohärenter Zustand</u>