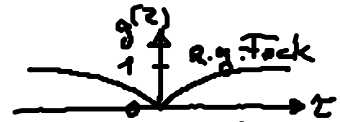
**English Summary:**

**Conditions for nonclassical light**




$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ , $g^{(2)}(0) < 1$ (sub-Poissonian correlation)

**4.6 Quantum Master equations**

$\underset{SR}{\varrho}(t) = \underbrace{\varrho_s(t) \otimes \varrho_R(0)}_{\text{system} \quad \text{reservoir}} + \underbrace{\varrho_c(t)}_{\text{coupling}}$ , $\varrho_s(t) = tr_R\, \varrho_{SR}$ reduced density matrix

$$\boxed{\dot{\varrho}_s(t) = -\frac{i}{\hbar} tr_R \left[V(t), \varrho_s(0) \otimes \varrho_R(0)\right] - \frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \left[V(t), \left[V(t'), \varrho_s(t)\right] \otimes \varrho_R(0)\right]}$$

Master eq. in interaction picture; interaction Ham. V; Born-Markov appr.

∘ BdA $tr_R\left[V, \varrho_R(0)\right] = 0$ ($\langle \text{reservoir op.} \rangle_R = 0$ ⇒ 1. Term L.S. fällt weg)

$$\boxed{\dot{\varrho}_s(t) = -\frac{1}{\hbar^2} tr_R \int_0^t dt' \left[V(t), \left[V(t'), \varrho_s(t)\right] \otimes \varrho_R(0)\right]}$$ Quanten-Master-Gl.

**Beispiel** : gedämpfter harmon. Oszillator

Ham.op. des System $S \otimes R$ : $H = \underbrace{H_S + H_R}_{H_0} + \underbrace{H_{SR}}_{= V}$

$H_S = \hbar\omega_0 a^+ a$ harm. Osz. $[a, a^+] = 1$

$H_R = \sum_j \hbar\omega_j r_j^+ r_j$ bosonische Reservoirmoden $[r_j, r_i^+] = \delta_{ij}$

im therm. Gl. $\varrho_R = \prod_j e^{-\frac{\hbar\omega_j r_j^+ r_j}{kT}} (1 - e^{-\frac{\hbar\omega_j}{kT}})$

(z.B. Vakuum-Strahlungfeld oder Phonon-Moden im Festk.)

↑ Zerfall einer Mode $\omega_0$ einer opt. Kavität

↑ Zerfall eines angeregten Atoms durch spontane Emission

$$H_{SR} = \sum_j \hbar (\kappa_j^* a r_j^+ + \kappa_j a^+ r_j) \quad \kappa_j \in \mathbb{C} \text{ damping rate}$$

$$= \hbar (a\Gamma^+ + a^+\Gamma) \quad \Gamma, \Gamma^+ \text{ coupling op.}$$

im WW-Bild:

$$a_W(t) = e^{i\omega_0 a^+ a t} \underset{\text{Schröd. Bild}}{a} e^{-i\omega_0 a^+ a t} \overset{\circledast}{=} a e^{-i\omega_0 t}$$

$$a_W^+(t) = e^{i\omega_0 a^+ a t} a^+ e^{-i\omega_0 a^+ a t} = a^+ e^{i\omega_0 t}$$

$$\Gamma_W^+(t) = e^{i\sum_n \omega_n r_n^+ r_n t} \sum_j \kappa_j^* r_j^+ e^{-i\sum_m \omega_m r_m^+ r_m t}$$

$$= \sum_j \kappa_j^* r_j^+ e^{i\omega_j t} \Rightarrow \langle \Gamma_W^+(t) \rangle_R = 0$$

$$\Gamma_W(t) = e^{i\sum_n \cdots} \sum_j \kappa_j r_j e^{-i\sum_m \cdots}$$

$$= \sum_j \kappa_j r_j e^{-i\omega_j t} \Rightarrow \langle \Gamma_W(t) \rangle_R = 0$$

$\circledast$ denn $\dot{a} = -i\omega_0 [a, a^+ a] = -i\omega_0 (\underbrace{a a^+}a - \underbrace{a^+ a}a) = -i\omega_0 a$

(Heisenberg-Gln.) $[a, a^+] = 1$

Masterglg. (Born-Markov) im WW-Bild

$$\dot{\varrho}_S = -\int_0^t dt' \Big\{ \big(aa\varrho_S(t) - a\varrho_S(t)a\big) e^{-i\omega_0(t+t')} \underbrace{\langle \Gamma_W^+(t)\Gamma_W^+(t')\rangle_R}_{0 \text{ in Fock-Basis nachrechnen}}$$

$$+ \big(a^+a^+\varrho_S(t) - a^+\varrho_S(t)a^+\big) e^{i\omega_0(t+t')} \underbrace{\langle \Gamma_W(t)\Gamma_W(t')\rangle_R}_{0}$$

$$+ \big(aa^+\varrho_S(t) - a^+\varrho_S(t)a\big) e^{-i\omega_0(t-t')} \underbrace{\langle \Gamma_W^+(t)\Gamma_W(t')\rangle_R}_{\sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')}\bar{n}(\omega_j,T)}$$

$$+ \big(a^+a\varrho_S(t) - a\varrho_S(t)a^+\big) e^{i\omega_0(t-t')} \underbrace{\langle \Gamma_W(t)\Gamma_W^+(t')\rangle_R}_{\sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')}(\bar{n}(\omega_j,T)+1)}$$

$$+ h.c. \Big\}$$

mit $\bar{n}(\omega_j,T) = tr_R(\varrho_R r_j^+ r_j) = \dfrac{e^{-\frac{\hbar\omega_j}{kT}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega_j}{kT}}}$ Bose-Verteilung

$\tau = t - t'$

$$\dot{\varrho}_S = -(aa^+\varrho_S - a^+\varrho_S a)\int_0^t d\tau\, e^{-i\omega_0\tau}\langle \Gamma_W^+(t)\Gamma_W(t-\tau)\rangle_R + h.c.$$

$$-(a^+a\varrho_S - a\varrho_S a^+)\int_0^t d\tau\, e^{i\omega_0\tau}\langle \Gamma_W(t)\Gamma_W^+(t-\tau)\rangle_R + h.c.$$

Kontinuumslimes der Reservoir-Korrelationsfkt.en:

$$\langle \Gamma_W^+(t)\Gamma_W(t-\tau)\rangle_R = \int_0^\infty d\omega\, e^{i\omega\tau} g(\omega)|\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega,T) \approx \delta(\tau)$$

$g(\omega)$: Zustandsdichte des Reservoirs

$$\langle \Gamma_W(t)\Gamma_W^+(t-\tau)\rangle_R = \int_0^\infty d\omega\, \underbrace{e^{-i\omega\tau}}_{\text{schnell oszill.}} \underbrace{g(\omega)|\kappa(\omega)|^2[\bar{n}(\omega,T)+1]}_{\text{langsam variabel}} \approx \delta(\tau)$$

$\int \approx 0$ für $\tau \gg t_R = \frac{\hbar}{kT}$ Reservoir-Korrelationszeit

$\Leftrightarrow \omega\tau = \frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$

Def. Zerfallsraten:

$$\gamma_1 := \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega\, e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}\, g(\omega)\,|\kappa(\omega)|^2$$

$$\gamma_2 := \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega\, e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}\, g(\omega)\,|\kappa(\omega)|^2\, \bar{n}(\omega,T)$$

Hauptbeitrag der $\tau$-Integration: kleine $\tau$ $\Rightarrow$ ersetze $\int_0^t \to \int_0^\infty d\tau$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t d\tau\, e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} = \pi\delta(\omega-\omega_0) + i\,\frac{P}{\omega_0-\omega}$$

Cauchy-Hauptwert

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} + i\Delta$$

$$\gamma_2 = \frac{\gamma}{2}\bar{n} + i\Delta'$$

mit $\gamma := 2\pi g(\omega_0)\,|\kappa(\omega_0)|^2$

$$\Delta := P\int_0^\infty d\omega\, \frac{g(\omega)\,|\kappa(\omega)|^2}{\omega_0-\omega}$$

$$\Delta' := P\int_0^\infty d\omega\, \frac{g(\omega)\,|\kappa(\omega)|^2}{\omega_0-\omega}\,\bar{n}$$

Mastergl.:

$$\dot{\varrho}_s = (a^+\varrho_s a - aa^+\varrho_s)\gamma_2^* + \overbrace{(a^+\varrho_s a - \varrho_s a a^+)\gamma_2}^{\text{h.c. } \varrho_s=\varrho_s^+}$$

$$+ (a\varrho_s a^+ - a^+a\varrho_s)(\gamma_1+\gamma_2) + \underbrace{(a\varrho_s a^+ - \varrho_s a^+a)(\gamma_1^*+\gamma_2^*)}_{\text{h.c.}}$$

$$= a^+\varrho_s a\,\gamma\bar{n} - (aa^+\varrho_s + \varrho_s aa^+)\frac{\gamma}{2}\bar{n} + \underbrace{(aa^+\varrho_s - \varrho_s aa^+)}_{a^+a\varrho_s - \varrho_s a^+a} i\cancel{\Delta'} \qquad [a,a^+]=1$$

$$+ a\varrho_s a^+\gamma(1+\bar{n}) - (a^+a\varrho_s + \varrho_s a^+a)\frac{\gamma}{2}(1+\bar{n}) - (a^+a\varrho_s - \varrho_s a^+a)\,i(\Delta+\cancel{\Delta'})$$

$$= -i\Delta[a^+a,\varrho] + \frac{\gamma}{2}(2a\varrho_s a^+ - a^+a\varrho_s - \varrho_s a^+a)$$

$$+ \gamma\bar{n}(a\varrho_s a^+ + a^+\varrho_s a - a^+a\varrho_s - \varrho_s aa^+)$$

Rücktransform. WW-Bild $\longrightarrow$ Schrödinger-Bild $\varrho_s^{(S)}$

$$\dot{\varrho}_s^{(S)} = -\frac{i}{\hbar}[H_s, \varrho_s^{(S)}] + e^{-\frac{i}{\hbar}H_s t}\, \dot{\varrho}_s^{(S)}\, e^{\frac{i}{\hbar}H_s t}$$

$$e^{-i\omega_0 a^+ a t} \underbrace{a \varrho_S a^+}_{\text{WW-Bild}} e^{i\omega_0 a^+ a t} = \underbrace{a \varrho_S^{(S)} a^+}_{\text{Schröd. Bild}} \qquad H_S = \hbar\omega_0 a^+ a$$

## Mastergl. für gedämpften harmon. Osz.:
(Schrödinger-Bild)

$$\dot{\varrho}_S^{(S)} = -i\underbrace{\omega_0'}_{\omega_0+\Delta}[a^+a, \varrho_S^{(S)}] + \frac{\gamma}{2}(2a\varrho_S^{(S)}a^+ - a^+a\varrho_S^{(S)} - \varrho_S^{(S)}a^+a)$$

$$+ \gamma\bar{n}(a\varrho_S^{(S)}a^+ + a^+\varrho_S^{(S)}a - aa^+\varrho_S^{(S)} - \varrho_S^{(S)}aa^+)$$

renormierte Frequenz durch Ankoppl. ans Bad

<u>revers. Dyn.</u>

<u>dissipative Dynamik</u>

Dämpfung durch
- spontane Em.
- stim. Em. / Abs. ($\sim \bar{n}$) von Bad-Bosonen

(z.B. Photon, Phononen)

$$\Leftrightarrow \dot{\varrho}_S^{(S)} = -i\omega_0'[a^+a, \varrho_S^{(S)}] + \frac{\gamma}{2}\left([a, \varrho_S^{(S)}a^+] + [a\varrho_S^{(S)}, a^+]\right)$$

$$+ \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left([a\varrho_S^{(S)}, a^+] + [a^+, \varrho_S^{(S)}a]\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{\varrho}_S^{(S)} = -i\omega_0'[a^+a, \varrho_S^{(S)}] &+ \frac{\gamma}{2}(\bar{n}+1)\big(\underbrace{2a\varrho_S^{(S)}a^+}_{n+1\to n} - \underbrace{\{a^+a, \varrho_S^{(S)}\}}_{\substack{\text{Anti-Kommutator} \\ n\to n-1}}\big) \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n}\big(\underbrace{2a^+\varrho_S^{(S)}a}_{n-1\to n} - \underbrace{\{aa^+, \varrho_S^{(S)}\}}_{n\to n+1}\big)\end{aligned}}$$

<u>Lindblad-Form</u>