

für  $f_s \dots$  s-Teilchen wahrenzeitliche:

Liouville  $\rightarrow$

$$\underbrace{\frac{\partial f_s}{\partial t} - \{H_s, f_s\}}_{\text{"Strömungsterm"}} = \underbrace{\sum_{n=1}^s \int dV_{s+1} \frac{\partial V(q_n - q_{s+1})}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial p_n}}_{\text{"Stoßterm"}} \quad (4.12)$$

der s Teilchen mit restliche N-s Teilchen

$\rightarrow$  Hierarchie von Gln.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \dots = \dots f_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} \dots = \dots f_3$$

$\vdots$

$\rightarrow$  Zur Behdlg. ist Abbruchbedingg. nötig.

### 4.3 Die Boltzmann-Gleichung

#### 4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

Bewegl. für  $f_1$ : (4.12)  $\rightarrow$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \quad (4.13)$$

Abbruchbedingg. + "Vergrößerung":

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2, t) \rightarrow f_1(q, p_1, t) f_1(q, p_2, t) \quad (4.14)$$

Bem.: (i) Annahme: Potential  $V(q_1 - q_2)$  hat unendliche Reichweite  $d$

$\rightarrow$  für  $|q_1 - q_2| \gg d$  keine 2-Teilchen-Korrelationen

$\hat{=}$  molekulares Chaos

(ii) Freiein: Stoßpkt.  $q$  der Teilchen  $\rightarrow$  Ausdehnung  $d$

$\rightarrow$  Vergrößerung der Lage  $q$  und Zeit  $t$   $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Vergrößerung der Lage } q \\ \text{Zeit } t \end{matrix}} \right\}$  Stoß wird räumlich/zeitlich nicht aufgelöst

$\hat{=}$  Informationsverlust!

• Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad f_1(q, p_1, t) &= f(q, p_1, t) = f \\ f_i(q, p_i, t) &= f(q, p_i, t) = f_i \quad , i \geq 2 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$(ii) \quad \{H_1, f\} = \frac{\partial H_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} \quad , \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (4.16)$$

$$= -E \cdot \nabla_p f - \frac{p}{m} \cdot \nabla_q f \quad \text{mit } E = -\nabla_q U \quad \text{... äußere Kraft}$$

• Boltzmann-Gl.: (4.15), (4.16) in (4.13) [Form des Stoß-  
kerns s. Buch Kardar]

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + E \cdot \nabla_p \right) f(q, p, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} \quad (4.17)$$

$$\text{mit } \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(p_1, p_2; p_3, p_4) [f_3 f_4 - f f_2]$$

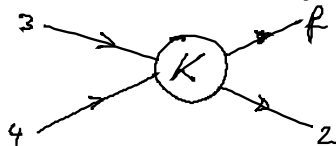
$$= G - V \quad \text{... Boltzmannscher Stoßkernansatz}$$

$G \int d^3 q d^3 p$  ... Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit  
in } Volumen  $d^3 q d^3 p$  hinein } geboren werden  
aus } Volumen  $d^3 q d^3 p$  heraus }

Bedeutg: Änderung von  $f$  durch Stoßprozesse

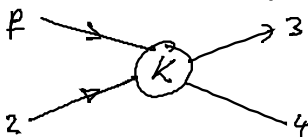
$K(p_1, p_2; p_3, p_4)$  ... Übergangswahrscheinlichkeit  
für  $p_3, p_4 \rightarrow p_1, p_2$

(i)  $G$  (Gewintern)



„erzeugt“ Teilchen mit Impuls  $p$

(ii)  $V$  (Verlustkern)



„vernichtet“ Teilchen mit Impuls  $p$

(iii)  $K(\dots) f_i f_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \dots$  Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit im Volumen  $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von  $K$ :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p_1; p_4, p_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei  $D \in O(3)$

$$K(D p_1, D p_2; D p_3, D p_4) = K(p_1, p_2; p_3, p_4) \quad (4.19)$$

insbesondere:  $D p = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2) = K(p_1, p_2; p_3, p_4) \quad (4.20)$$

$\xrightarrow{\text{mit (i)}}$   $K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(+p_3, +p_4; p_1, p_2) \quad (4.21)$

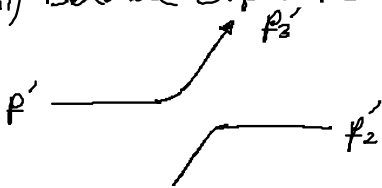
• genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:  
s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhalt:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right) \quad (4.22)$$

(ii) Behalte Stoß im Schwer p.k.t. system (')



$v_1$   
 $p_1$

Relativ Koordinate: Streuung eines Teilchens am anderen (hier 2 am 1)  
(vgl. Kepler problem)

Intensität des Teilchen strahls: (Strahlendichte = Dichte  $\times$  Geschw.)

$I =$  Zahl der einfallenden Teilchen 2 mit Impuls  $p_2$   
pro Zeit und Fläche

$$= \underbrace{f(q, p_2)}_{f_2} d^3 p_2 |v_1 - v_2| \quad (4.23a)$$

$dN(\hat{\Omega}) \dots$  Zahl der pro Zeit in das Raumwinkelelement  $d\Omega$   
von Richtung  $\hat{\Omega}$  gestreute Teilchen



→ differentielle Streuganschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23) \quad \rightarrow \quad dN = \frac{d\sigma}{d\Omega} I d\Omega$$

z.B. → Oerleuten  $V = - \int dN f(q, p, t)$   
in Boltzmann-Gl.

$$\stackrel{(4.23)}{=} - \int d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| I f$$

$$\stackrel{(4.23a)}{=} - \int d\Omega d^3 p_2 \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v_1 - v_2| f f_2$$

$$\Rightarrow \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v_1 - v_2| \left[ \underbrace{f(q, p_2, t) f(q, p_1, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p_1, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \right] \quad (4.24)$$

Bem:  $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$

über Erhaltungssätze verknüpft mit  $p_1, p_2$

hier wichtig: nur vor dem Stoß „molekulares Chaos“  
d.h. keine Korrelationen