

### 4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

• Boltzmann-Gl.:  $\mathcal{L}[f] = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}}$   
 mit  $\mathcal{L}[f] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \nabla_{\underline{q}} + \underline{F} \cdot \nabla_{\underline{p}} \right]$  (4.45)  
 $(\underline{p} = \underline{u} + \underline{c}) = \left[ \frac{d}{dt} + \underline{c} \cdot \nabla_{\underline{q}} + \frac{1}{m} \underline{F} \cdot \nabla_{\underline{c}} \right]$

• Problem:  $\left. \frac{df_0}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = 0$ , aber  $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$ ,  $f_0$  s. (4.25)  
 lokales GG

• Näherlösung: "1. Ordnung"

(i)  $f = f_0(1 + \Delta)$  mit  $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45):  $\mathcal{L}[f_0 + f_0 \Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$  &  $\mathcal{L}[f_0 \Delta] \ll \mathcal{L}[f_0]$

$$\rightarrow \mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$$

$$\rightarrow \Delta \approx -\tau \frac{1}{f_0} \mathcal{L}[f_0] = -\tau \mathcal{L}[\ln f_0] \quad (4.46)$$

berechne  $\mathcal{L}[\ln f_0]$  & Ansatz:  $n(\underline{q}, t)$ ,  $u(\underline{q}, t)$ ,  $T(\underline{q}, t)$   
 in  $f_0$  lösen (4.42) - (4.44)

o.B.  $\rightarrow$

$$f = f_0(1 + \Delta)$$

$$\text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T} \left( c_i c_j - \frac{\delta_{ij} c^2}{3} \right) D_{ij} - \tau \left( \frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2} \right) \frac{c_i}{T} \nabla_i T \quad (4.47)$$

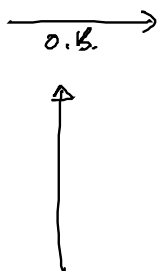
$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \text{ - Deformationsrate}$$

• Mittelwerte:

$$\langle A \rangle = \int d^3 p A f_0(1 + \Delta) = \langle A(1 + \Delta) \rangle_0 \quad (4.48)$$

• Spannungstensor "1. Ordnung":

$$T_{ij} \stackrel{(4.35)}{=} -m \langle c_i c_j \rangle = -m \left[ \langle c_i c_j \rangle_0 - \tau \frac{m}{k_B T} \langle c_i c_j \left( c_k c_l - \frac{\delta_{kl} c^2}{3} \right) \rangle_0 \right]$$



$$T_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\eta \left( D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \right)$$

$T_{ij}$  ... viskoser Spannungstensor

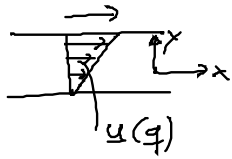
mit  $P = n k_B T$  ... Druck

$\eta = n k_B T \tau$  ... Scher viskosität

$$\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}$$

$$\langle c_i c_j c_k c_l \rangle = n \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \times ( \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} )$$

Deutung: (i) Scherströmung:



•  $D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \neq 0 \rightarrow T'_{ij}$

• nicht zeitumkehrinvariant:  $T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$

→ Dissipation

→ Relaxation von Schermoden ins GG

•  $\text{Sp } \underline{D} = D_{ii} = \text{div } \underline{u}$  ... Spur von  $\underline{D}$

also:  $\underline{D} - \frac{1}{3} \mathbb{1} \text{div } \underline{u} = 0 \quad \text{für } \underline{D} = \frac{1}{3} \mathbb{1} \text{div } \underline{u}$

NB:  $\rightarrow \frac{d}{dt} \underline{u} = -\eta \text{div } \underline{u}$

also  $\text{div } \underline{u} = 0 \hat{=}$  inkompressible Flüssigkeit

• Wärmestromdichte: „1. Ordnung“

$$q_i \stackrel{(4.28)}{=} \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle \stackrel{(4.97)}{=} - \frac{m \tau}{2} \langle \left( \frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2} \right) c_i c_k c_l \rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

o.B. →

$$q = -\kappa \nabla q T \quad (4.50)$$

mit  $\kappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m} \tau$  ... therm. Leitfähigkeit

$q \sim -\nabla_q T \rightarrow q$  gliedert  $\nabla_q T$  aus  
 $\rightarrow$  Relaxation ins GG

Hydrodynamische Bewegungsgleichungen:

(4.34) $\longrightarrow$	$\frac{\partial n}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n \underline{u})$ (4.51)
(4.36) $\frac{\nabla_j T_{ij} = \dots}{E_i = 0} \longrightarrow$	$m n \frac{d}{dt} \underline{u} = -\nabla_q p + \eta \nabla_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \zeta \nabla_q (\nabla_q \cdot \underline{u})$ (4.52)
(4.38) $\frac{-\nabla_q \cdot \underline{q}}{T_{ij} \nabla_i u_j} \longrightarrow$	$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{2\kappa}{3n k_B} \nabla_q^2 T}_{\text{von } -\nabla_q \cdot \underline{q}} - \frac{2}{3} T \nabla_q \cdot \underline{u} + \underbrace{\frac{2}{3n k_B} T_{ij} \nabla_i u_j}_{\text{von } T_{ij} \nabla_i u_j \text{ \& } p = n k_B T}$ (4.53)

Bem: (1) Gl. (4.52)  $\equiv$  Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression  $\eta + \frac{1}{3} \zeta$  statt  $\frac{1}{3} \zeta$ !

(2) Gl. (4.53): für  $\nabla_i u_j = 0 \rightarrow$  reine Diff. gl. für T

$T_{ij} \nabla_i u_j \dots$  nichtlinearer Term in  $\underline{u}$ !

Modalanalyse:  $\begin{pmatrix} \delta T \\ \delta n \\ \underline{u} \end{pmatrix} \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$  Wellenvektor

2 diffusive Schermoden:

Dispersionsrelation:  $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m n} k^2$

Dämpfrate  $-i\omega \rightarrow 0$ , für  $k \rightarrow 0$

$\hat{=}$  hydrodynamische Mode

1 diffusive, Temperaturmode  $\omega_3$

2 gedämpfte Schallwellen

$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left( \frac{2\eta}{3m n} + \frac{2\kappa}{15k_B n} \right) + O(k^2)$

## 5. Statistische Ensemble

- Ziel: Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen  
insbes.:  $S, U, F, A, G, \dots$   
                  thermodynam. Potentiale
- Weg: Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Festlegung von Randbedingungen  $\rightarrow$  Charakterisieren die Makrozustände
- beachte: Im thermodynam. Limes  $N \rightarrow \infty$  sind alle Ensemble äquivalent