

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \stackrel{(4.17)}{=} - \int d^3q_1 d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 K(p_1, p_2; p_3, p_4) [f_1 f_2 - f_3 f_4] (1 + \ln f_1)$$

Kinvariant unter $1 \leftrightarrow 2$ und $1 \leftrightarrow 3$
 $3 \leftrightarrow 4$ und $2 \leftrightarrow 4$

$$\begin{pmatrix} f_2 f_1 - f_4 f_3 \\ f_3 f_1 - f_1 f_2 \\ f_1 f_2 - f_2 f_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} = - \frac{1}{4} \int d^3q_1 d^3p_1 \dots K(p_1, p_2; p_3, p_4) (f_1 f_2 - f_3 f_4) \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4} \quad (4.25)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \text{ gilt}$$

• Bemerkungen

(i) - $H \sim$ Informationsentropie
 - $H \sim$ Boltzmann-Entropie
 für $f = \text{konst.}$ (s. Kap. 5.1)

} H-Theorem ist Bsp. für Entropiezunahme!

(ii) Grund für Irreversibilität:

(1) Annahme des molekularen Chaos
 (2) "Vergrößerung" der Längens- und Zeitskala

} Verlust an Information über System

4.3.3 Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

• Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$$\stackrel{(4.26)}{\rightarrow} f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\text{vor nach}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\text{nach vor Stoß}}$$

erfüllt durch additive Größen, die bei Stoß erhalten bleiben:

→ Stoßinvarianten:

$$\begin{aligned} \chi^i &= p_i, \quad i=1,2,3 && \dots \text{Impuls} \\ \chi^4 &= \frac{p^2}{2m} && \dots \text{kinetische Energie} \\ \chi^5 &= 1 && \dots \text{Teilchenzahl} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\rightarrow \ln f = a(q) + \alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow f(q, p) = \underbrace{N(q)}_{e^{a(q)}} \exp \left[\alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m} \right] \quad (4.28)$$

• lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3 p f(q, p) = n(q, t)$... Teilchenzahldichte

$$n \stackrel{(4.28)}{=} N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp \left(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m} \right) \quad i=1,2,3, \text{ keine Einheits-} \\ \text{summenfunktion}$$

$$= N(q) \prod_{i=1}^3 \int dp_i \exp \left\{ -\frac{\beta}{2m} \left(p_i - \frac{m \alpha_i}{\beta} \right)^2 + \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right\} \quad (*)$$

$$= N(q) \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{m \alpha^2}{2\beta} \right) \quad (4.28a)$$

$\xrightarrow{(4.28a) \text{ in } (4.28)}$
& Umbenennung

$$f(q, p, t) = n(q, t) \frac{1}{[2\pi m k_B T(q, t)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(p - m u(q, t))^2}{2m k_B T(q, t)} \right]$$

mit $n(q, t)$... Teilchenzahldichte

$k_B T(q, t) = \beta^{-1}$... lokale Temperatur (s.u.)

$m u(q, t) = \langle p \rangle = \frac{m \alpha}{\beta}$... lokaler mittlerer Impuls

(4.29)

... lokale Maxwell-Verteilung
" Gleichgewichtsverteilung

bis jetzt: $\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = 0$

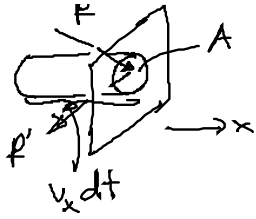
• globales Gleichgewicht: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \wedge \{H, f\} = 0$

für Gas im Volumen V mit $u=0$ (äußeres Potential) $\begin{cases} n = \frac{N}{V} = \text{konstant} \\ T = \text{''} \\ u = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow f(q, p) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp \left(-\frac{p^2}{2m k_B T} \right) \quad (4.30)$$

(ii) Zustandsgleichung: für Gas mit N Teilchen in Vol. V

• Druck $\hat{=}$ Kraft auf Wand von reflektierten Teilchen



Zahl der Teilchen mit p , die A treffen
in dt : $dN(p) = \underbrace{f(p) d^3 p}_{\text{Dichte}} \underbrace{A v_x dt}_{\text{Volumen von Teilchen die } A \text{ treffen}}$

$$\rightarrow F = \int_0^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f(p) (A \frac{p_x}{m} dt) \frac{2 p_x}{dt}$$

$(F = \frac{dp}{dt})$

$$\rightarrow P = \frac{F}{A} = \int d^3 p f(p) \frac{p_x^2}{m} \stackrel{(4.30)}{=} \frac{n}{\beta} \leftarrow (\frac{1}{2} T)^{-1}$$

$$\xrightarrow{n = \frac{N}{V}} \boxed{PV = N \frac{1}{2} T, \text{ falls } \beta = \frac{1}{k_B T}} \quad (4.31)$$

Identifikation von T über ideale Gasgleichg!

4.4 Hydrodynamische Bewegungsgleichungen